

1. Введение

Метод предельного равновесия (далее МПР) с процедурой перераспределения моментов совсем недавно был одним из основных методов расчета определенного класса статически неопределимых железобетонных конструкций (неразрезные балки, неразрезные балочные плиты и т.п.). Данный метод, как следует из учебников, «применим к расчету всех статически неопределимых конструкций, изготавливаемых из материалов, обладающих достаточно выраженными пластическими свойствами» [1].

Но с распространением программных комплексов, реализующих расчет по методу конечных элементов (далее МКЭ), многие проектировщики стали отказываться от данного метода, используя усилия из упругого расчета для армирования конструкций, сознательно отказываясь от процедуры перераспределения усилий¹. Этому способствовали много факторов – и сложные объемно-планировочные решения современных зданий и сооружений, при которых трудоемкость «перераспределения» усилий заметно перекрывала эффект от экономии, и условия работы инженера, когда, подчас, и на упругий расчет-то времени не хватало, и общая ориентация на «программы», как на последнюю инстанцию в ходе расчета, и подсознательное недоверие инженеров к перераспределению усилий (то есть – к образованию пластических шарниров или к образованию трещин, применительно к железобетону) и тому подобные факторы.

Однако понятно, что сам по себе МПР – это не просто арифметическая манипуляция, в результате которой можно получить некоторое «неклассическое» распределение моментов, а следствие пластических свойств материалов, в данном случае, железобетона. А раз так, то имея на руках МКЭ комплекс, реализующий нелинейную деформационную модель по СП 63.13330.2012, можно (при желании и необходимости) перераспределять усилия в произвольных статически неопределимых системах.

2. Постановка тестовой задачи

Понятно, что «произвольную» статически неопределимую систему обсматривать смысла нет (результаты её расчета будет довольно сложно верифицировать), поэтому для экспериментов примем простейшую модель, показанную на рисунках 1 и 2.

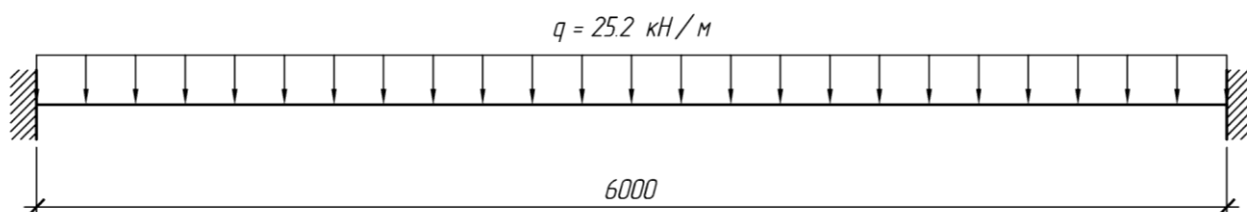


Рисунок 1. Тестовая задача с расчетной нагрузкой

¹ Но строго говоря, схема с арматурой, принятой по упругому расчету, также является одним из вариантов предельного равновесия системы – хотя и не самым рациональным с точки зрения расхода материалов.

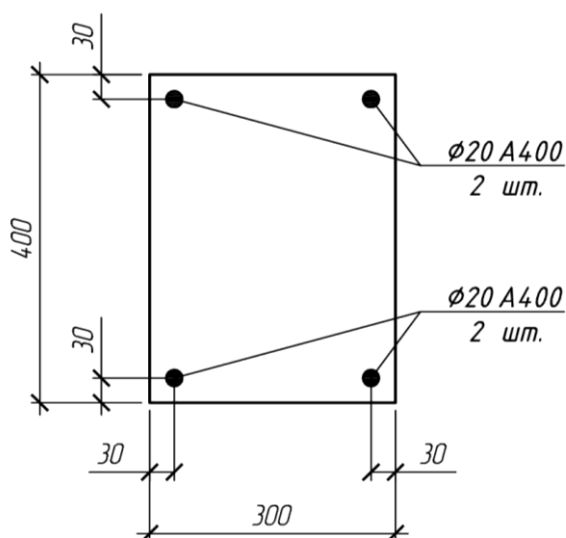


Рисунок 2. Сечение элемента тестовой задачи

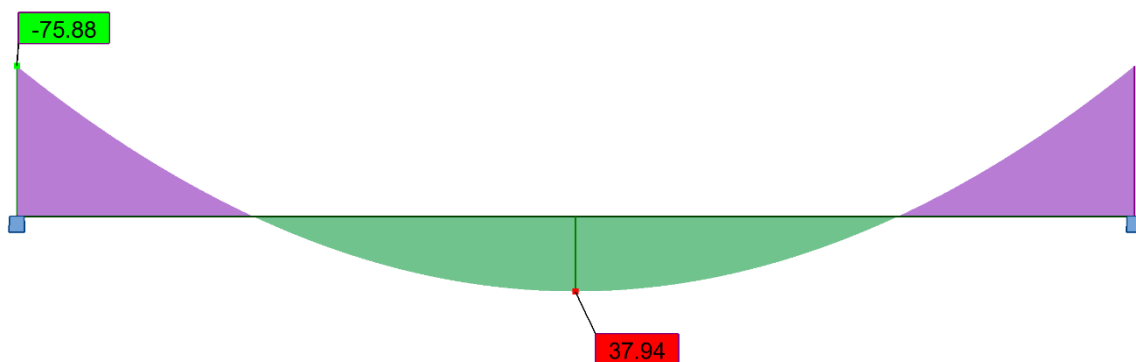


Рисунок 3. Эпюра изгибающих моментов в балке при расчетной нагрузке

Эпюра изгибающих моментов показана на рисунке 3, а параметры схемы и результаты расчетов по «упругой схеме», приведены в таблицах 1 и 2 (сам расчет элемента по упругой схеме приведен в Приложении 1, вследствие его объемности).

Таблица 1. Параметры расчетной схемы

<u>Параметры расчетной схемы</u>	
Класс бетона:	B25
Класс арматуры:	A400
Величина расчетной нагрузки:	$q = 25.20 \text{ кН/м}$
Величина нормативной нагрузки (принят довольно типичный коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f=1.15$):	$q_n = 21.91 \text{ кН/м}$
Доля длительности нагрузки (отношение постоянных и длительных нагрузок к общей величине нагрузки)	0.90

Таблица 2. Результаты расчета по упругой схеме

Результаты расчета по «упругой схеме»	
Предельный момент сечения:	$M_{ult}=75.81 \text{ кН}\cdot\text{м}^*$
Ширина продолжительного раскрытия трещин (при предельной величине $a_{cr,ult}=0.3 \text{ мм}$)**:	
– в опорном сечении:	$a_{cr}=0.292 \text{ мм}$
– в пролетном сечении:	$a_{cr}=0.126 \text{ мм}$
Прогиб в центре пролета:	$f=5.25 \text{ мм}$

* - в данном случае указана величина предельного момента сечения, определенного по МПУ (метод предельных усилий). Предельная величина момента, определенная по НДМ (нелинейная деформационная модель), несколько больше и составляет $M_{ult}=76.82 \text{ кН}\cdot\text{м}$

** - учитывалось условие (4.29) Пособия к СП 52-101-2003, при выполнении которого может проверяться только продолжительное раскрытие трещин

Казалось бы, все расчетные параметры данной конструкции близки к предельным, и дальнейшее увеличение нагрузки невозможно. Однако, согласно положениям МПР (<http://dwg.ru/b/lis/148>) данная конструкция (в силу своей статической неопределимости) обладает «резервом» несущей способности, который позволит увеличить нагрузку на 33% от текущей, то есть предельная величина равномерно-распределенной нагрузки составит:

$$q_{МПР} = 1.33 \times q_{УПР} = 33.5 \text{ кН/м}$$

Текущая инженерная методика основана на предположении образования «пластического шарнира» в наиболее «загруженных» сечениях элемента, который перестает сопротивляться увеличению нагрузки, однако «держит» уже полученную долю усилия. И было бы довольно интересно посмотреть, что это за пластический шарнир и каким образом он способствует перераспределению усилий в конструкции, посмотреть, как меняются параметры сечений и конструкции целиком.

Для этого, нужен расчетный МКЭ комплекс, реализующий модель нелинейного поведения железобетона (про геометрическую нелинейность сейчас речи не идет, её влияние в данном случае не будет существенным), то есть НДМ по СП 63.13330.2012. Есть ли такой комплекс на рынке МКЭ систем? Конечно - это ЛИРА-САПР.

3. Расчет в ЛИРА-САПР

ЛИРА относится к числу программ, которые не нуждаются в особом представлении – в данном случае куда более показательна богатая история развития комплекса. На территории стран СНГ данный программный продукт ценится инженерами за высокую надежность, удобство работы и наличие многих «эксклюзивных» возможностей среди конкурентов, среди которых особую нишу занимает возможность проведения нелинейных расчетов, в том числе и железобетонных элементов. А ведь это как раз то, что сейчас и нужно.

Для проведения расчетов, тестовая балка была разбита на 100 КЭ типа 202 (физически нелинейный стержневой КЭ плоской рамы)¹. Каждому элементу была назначена жесткость в соответствии с исходными данными, показанными на рисунках 4 и 5.

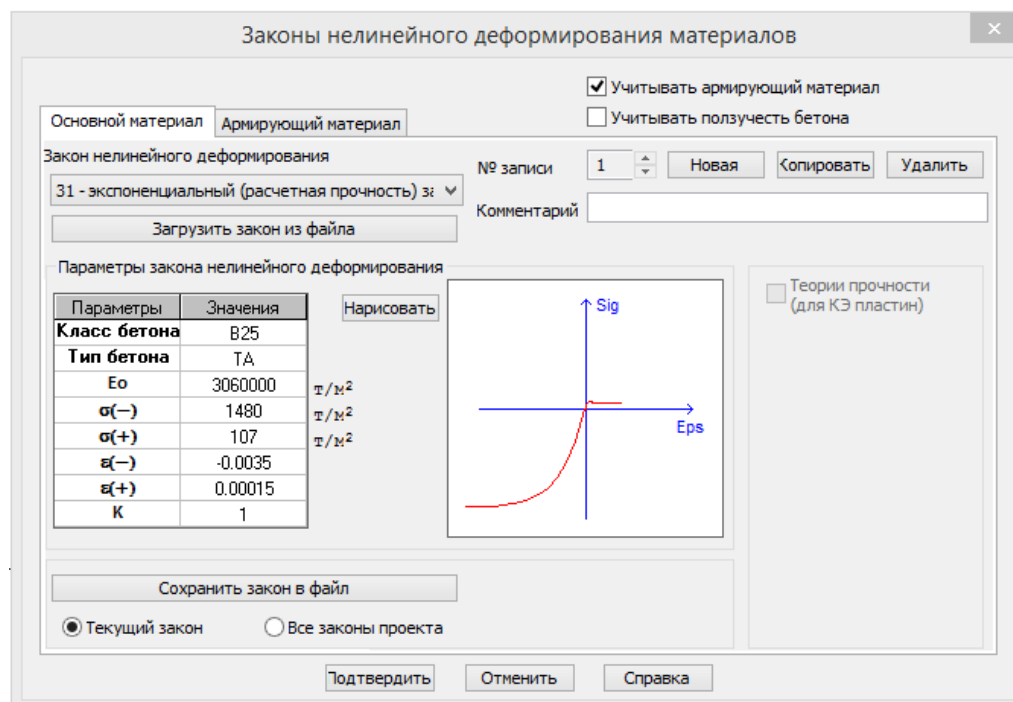


Рисунок 4. Параметры бетона из стандартной библиотеки ЛИРЫ-САПР

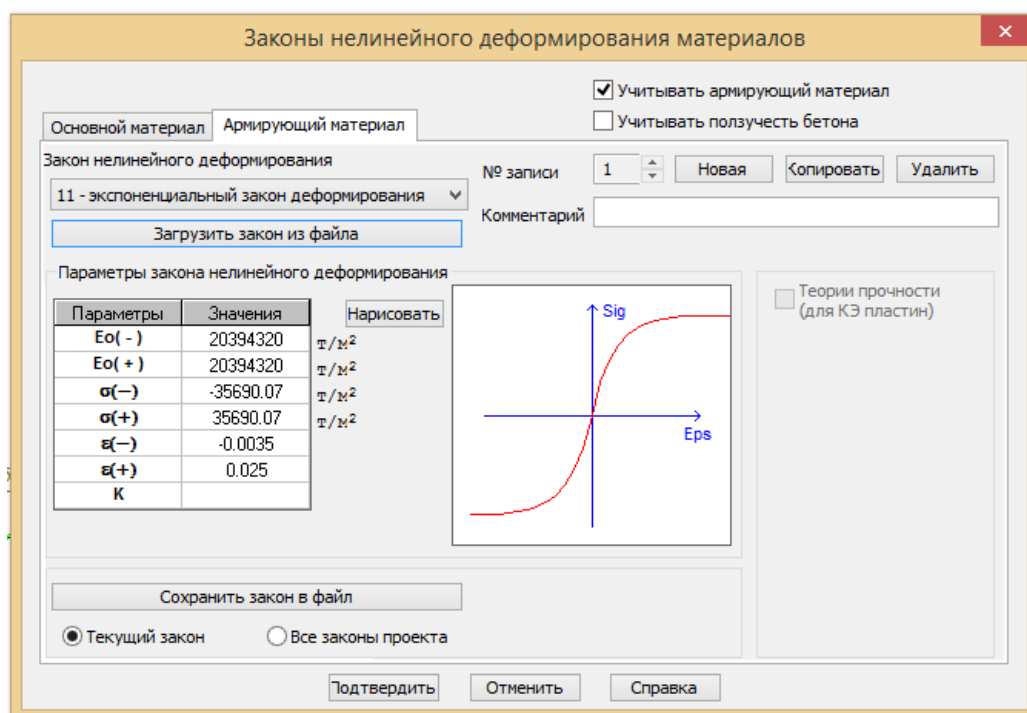


Рисунок 5. Параметры арматуры

¹ Забегая вперед – тип 210 также был использован, в процессе проверки

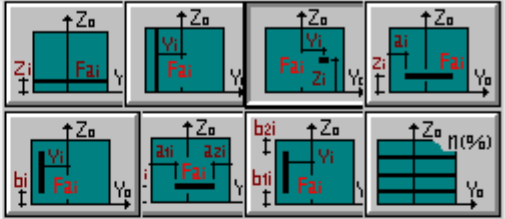
Характеристики физической нелинейности стержней

Тип арматурных включений

Номер слоя арматуры: 1

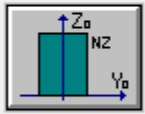
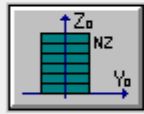
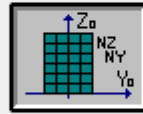
Fa: 3.14159 см² y: 12 см

z: 3 см



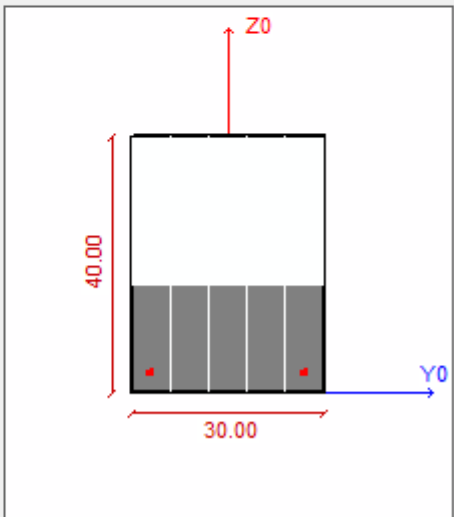
Точечная арматура

Типы дробления поперечного сечения

Дробление на элементарные прямоугольники

NZ: 75 NY: 5



Подтвердить
Нарисовать

Отменить
Справка

Рисунок 6. Параметры армирования сечения (верхние стержни не отображаются в связи с тем, что введено большое количество разбиений по высоте элемента, но они есть)

Принятая нагрузка на балку составила $q=3.569$ тс/м (то есть 35 кН/м, тут ненадолго надо будет переключиться на «тонн-силы») – нагрузку, которая превышает максимально допустимую, в том числе и по МПР. Для расчета было использовано 350 шагов приложения нагрузки – то есть нагрузка «прирастала» с шагом 0.1 кН/м. После этого выполнялся расчет¹.

Результаты расчета показаны на рисунке 7, и они... довольно неожиданные.

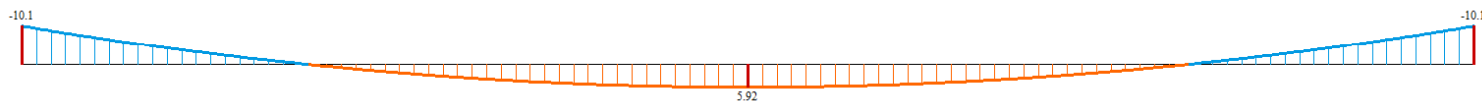


Рисунок 7. Эпюра изгибающего момента по длине элемента при величине нагрузки

Величина опорного момента составляет $M_{оп}=10.1$ тс×м=99.08 кН×м, а величина пролетного момента $M_{пр}=5.92$ тс×м= 58.08 кН×м. Конечно, соотношение моментов не такое ($M_{оп}/M_{пр} \neq 2$), как по результатам упругого расчета, однако видно, что ЛИРА, не «обратила

¹ Выражаю благодарность ЗАО «Сигни груп», г. Санкт-Петербург, а также Юрию Т., за предоставленную возможность использования лицензионной версии ЛИРА-САПР 2014

и то, что величина
т).

Посмотрим на параметры опорного сечения во вкладке «Трещины» элемента. Тут картина следующая.

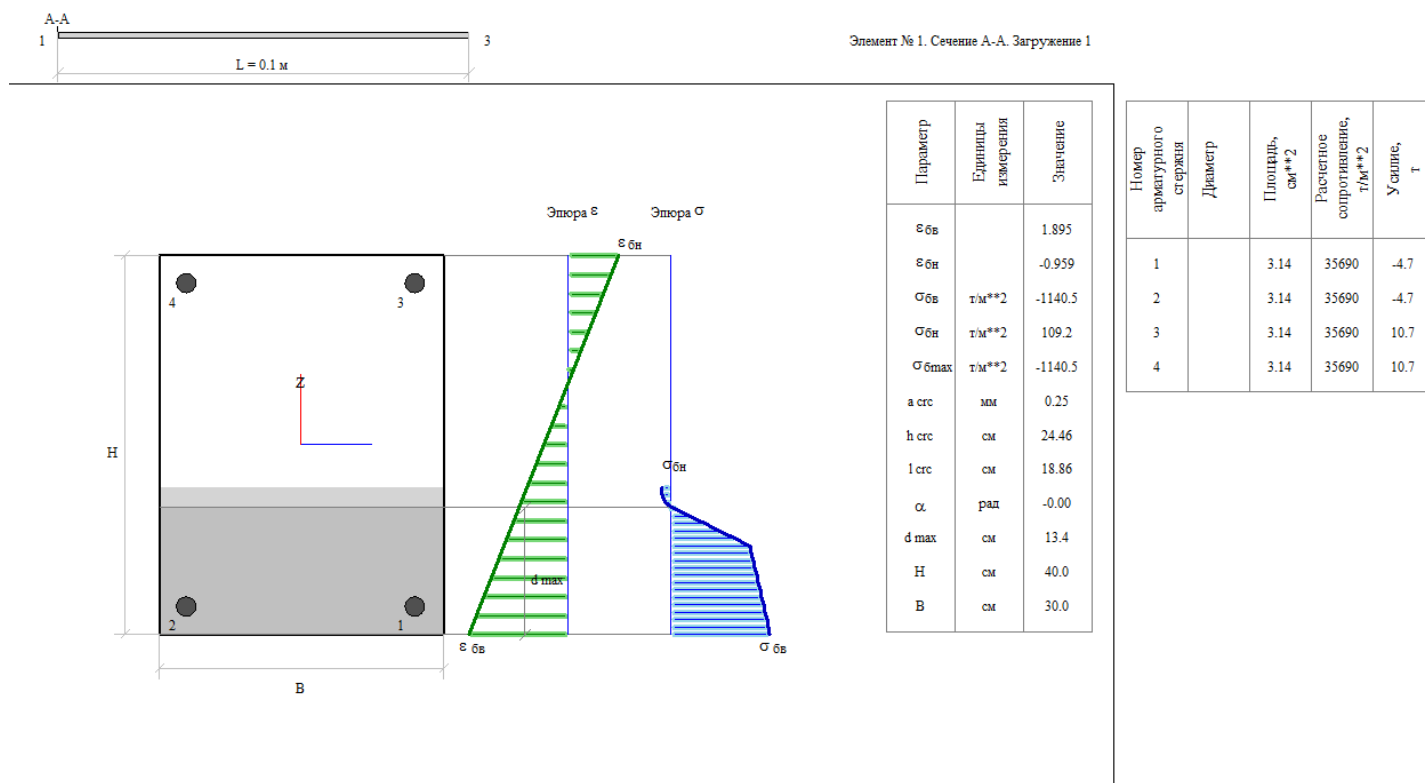


Рисунок 8. Параметры опорного сечения по результатам расчета ЛИРА-САПР

К сожалению, это не добавляет ясности. Что за параметры ε_{6B} и ε_{6H} и почему у них такие величины (по обозначению это относительные деформации верха и низа сечения, но откуда у них такие значения? Ведь сечение должно давно выйти из строя, при величинах относительных деформаций, на порядки меньших). Почему на совмещении эпюр напряжений и деформаций растянутый бетон «работает» в зоне, которая показана сжатой?

Посмотрим на сечение с «околонулевыми» усилиями – к сожалению, там картина не более понятная (особенно это касается величин загадочных $\varepsilon_{\text{бв}}$ и $\varepsilon_{\text{бн}}$).

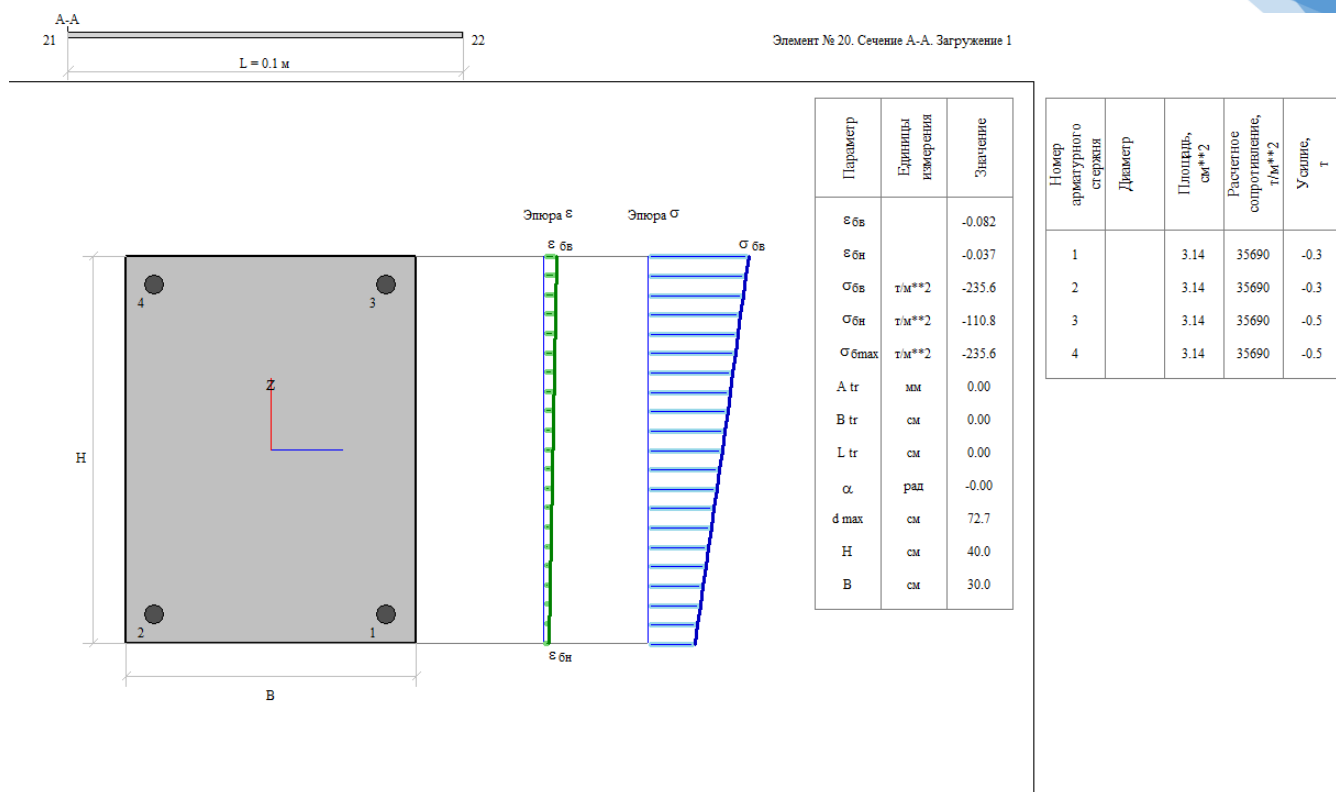


Рисунок 9. Параметры сечения с околонулевыми усилиями по результатам расчета ЛИРА-САПР

Рассматривался тот факт, что причиной данных результатов является работа растянутого бетона, которая заложена в стандартных законах ЛИРЫ-САПР (законы 21, 25, 31 и 35)? Попробуем это исправить: задаем материалы законом 14 – «кусочно-линейный закон деформирования» (причем, величину сопротивления бетона задаем минимальной), то есть по СП 63.13330.2012 (трехлинейная диаграмма для бетона и двухлинейная для арматуры), остальные параметры не корректируем.

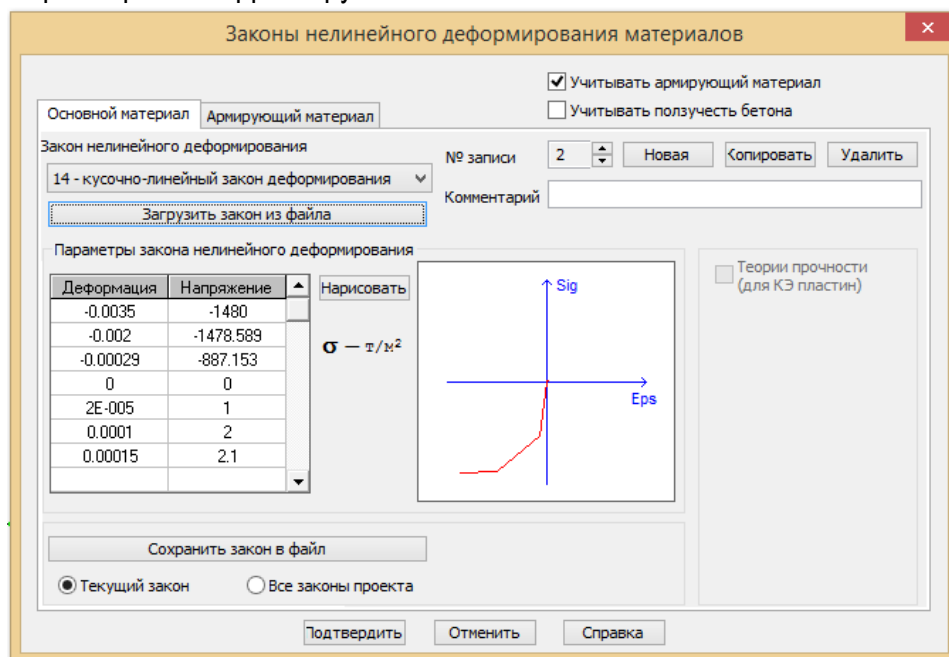


Рисунок 10. Параметры бетона

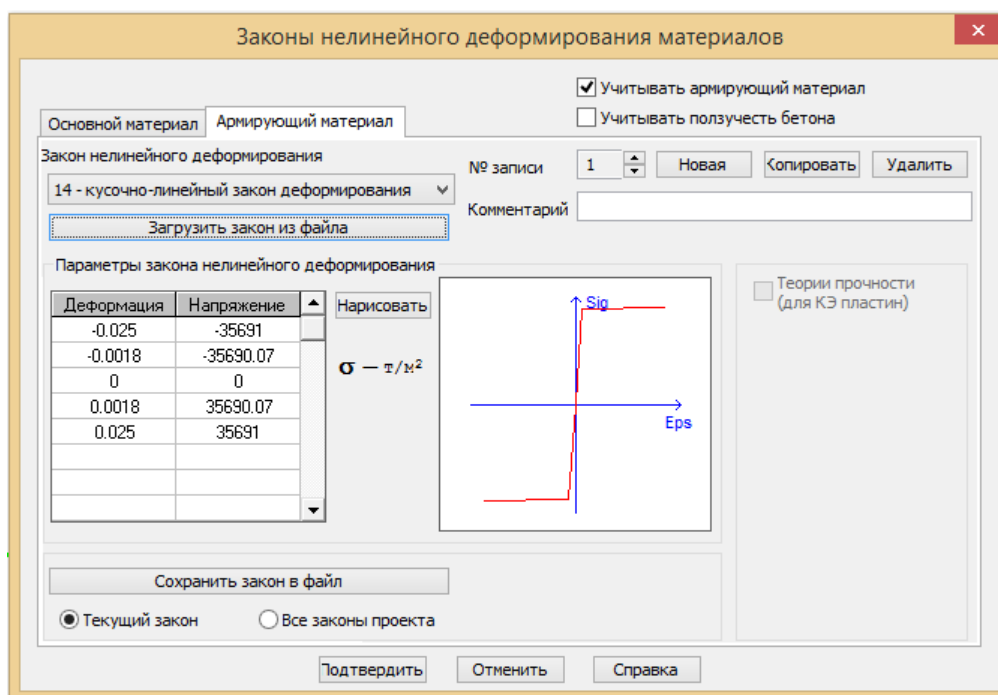


Рисунок 11. Параметры арматуры

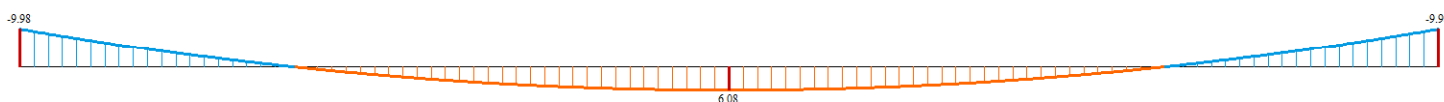


Рисунок 12. Результаты расчета схемы, в которой материалы задавались по 14 закону деформирования

Результаты, полученные по окончании расчета (рисунок 12), особо не улучшились – распределения усилий тут не наблюдается (хотя и понятно, что при подобной величине нагрузки балка должна бы уже разрушиться, а не «перераспределять»).

Вдоволь наупражнявшись с ЛИРОЙ, закрываем её – в деле расчета элементов по МПР она не смогла внести ясность¹.

4. Другие пути решения

В виду не самой удачной попыткой с ЛИРОЙ-САПР, переключаем внимание на другие программные продукты.

Есть, к примеру, Autodesk Robot Structural Analysis (далее RSA) – программа не менее заслуженная, чем ЛИРА, в чем-то ей уступающая (например, в физической нелинейности), а в чем-то – значительно превосходящая. Например, в **API**.

<i>API (интерфейс программирования приложений)</i>	<i>набор готовых классов, процедур, функций, структур и констант, предоставляемых приложением (библиотекой, сервисом) или операционной системой для использования во внешних программных продуктах. Используется программистами при написании всевозможных приложений.</i>
--	--

¹ Допускаю и собственные ошибки, для исключения которых выложены текстовые файлы ЛИРЫ

Предлагаемый алгоритм решения задачи при помощи API RSA будет следующий:

1. Создаем схему балки в RSA, разбиваем её на 100 элементов, каждому из которых присваиваем численную жесткость, при которой момент инерции будет приниматься $I_y = I_{red}^1$
2. Прикладываем нагрузку, начиная с самой незначительной. Например, первый шаг нагрузки будет $q=2$ кН/м. При данной нагрузке получаем усилия в элементах, которые «перекидываем» в макрос расчета нормальных сечений по НДМ (<http://dwg.ru/dnl/13011>) и там рассчитываем сечение на полученные усилия.
3. По результатам расчета, помимо основных параметров, получаем и кривизну в элементе, при заданном усилии, то есть $1/r$. А из параметра кривизны получаем эквивалентный момент инерции сечения² по формуле:

$$I_y = \frac{M}{(1/r)/E}$$

где E - модуль упругости принятого материала

4. «Возвращаем» характеристики сечений обратно в RSA, немного увеличиваем нагрузку (чем ближе она к предельной, тем более «аккуратным» будет следующий шаг) и производим расчет заново.

5. Повторяем данную процедуру до достижения ступени с предельной нагрузкой. Предельная нагрузка будет достигнута тогда, когда в результате расчета сечения по НДМ, коэффициент использования сечения какого-либо из элементов, не считая крайних³, превысит единицу (или говоря более технически корректно, величина относительной деформации элемента бетона или арматуры превысит предельную).

Тут, конечно, можно возразить по поводу пункта №4 - не совсем корректно проводить полный расчет с характеристиками сечения, полученными на определенном шаге. Куда более правильно было бы проводить нелинейный шаговый расчет, с параметрами сечений, меняющимися вместе с нагрузкой, по достижению определенного шага. Я с этим полностью согласен, и это даст определенные особенности в процессе расчета (какие - будет указано далее), однако на конечный результат не повлияет. В своё оправдание могу сказать, что я пытался решить данную проблему, но без особого успеха.

Естественно, учитывая богатые возможности для автоматизации в RSA, для данной процедуры был написан макрос, получивший название **RobotCollaborate**. Он как раз и занимается всей рутинной, по несколько раз пересчитывая параметры сечения, обновляя жесткости в RSA и получая оттуда новые усилия.

И тут можно переходить к следующей главе – расчет прочности, или определение несущей способности железобетонной конструкции.

¹ Момент инерции приведенного сечения – определяется согласно СП 63.13330.2012

² То есть такой момент инерции, при котором жесткость элемента будет соответствовать полученной кривизне, без корректировки модуля упругости материала, который может быть произвольным

³ Согласно МПР истощение несущей способности балки происходит за счет пролетного сечения

5. Определение несущей способности конструкции

В предыдущих главах упоминалась различная несущая способность данной балки: упругий расчет давал $q = 25.20$ кН/м, МПР гарантировал несущую способность на 33% больше (т.е. $q = 33.50$ кН/м), а если верить ЛИРЕ, то и $q = 35.00$ кН/м – это ничего страшного для данной конструкции (как минимум, документ #13 по результатам нелинейного расчета не сообщал о разрушении элементов; а нелинейный расчет на то и нелинейный, чтобы потом не «перепроверять» по формулам).

А какая величина несущей способности получилась по результатам расчета, алгоритм которого был описан в главе 4? Ответ: результаты полностью совпали с распределением усилий по методу предельного равновесия, и величина распределенной нагрузки на последнем шаге, при которой еще соблюдаются условия равновесия, составила $q=33.95$ кН/м¹.

Посмотрим на промежуточные величины, которые представляют особый интерес. На рисунке 13 показана эпюра моментов в балке, при предельной нагрузке $q=33.95$ кН/м (видно, что и пролетный, и опорный момент близки к предельному моменту по НДМ).

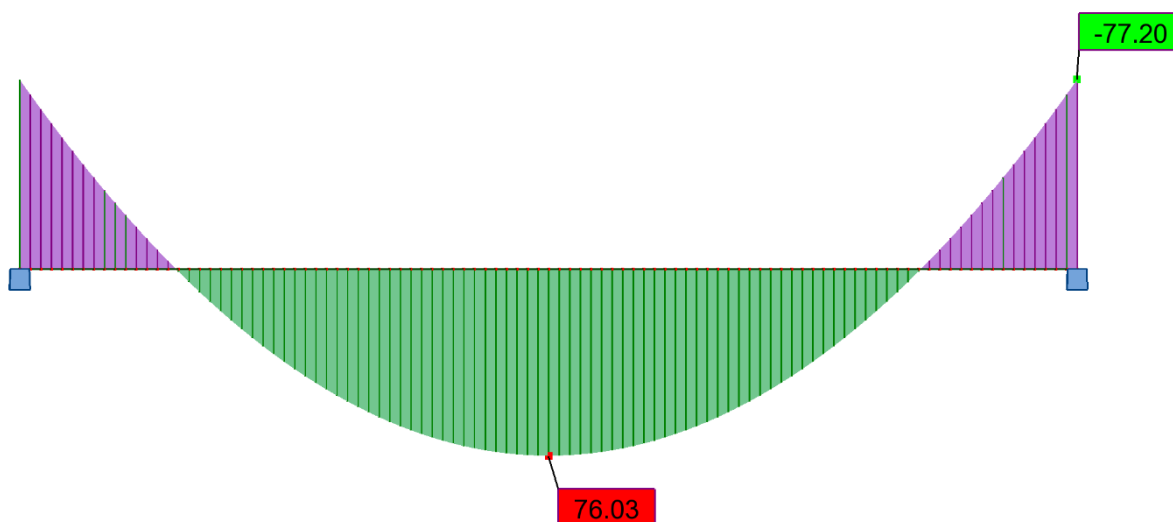


Рисунок 13. Эпюра моментов в балке при последнем шаге, при котором еще соблюдаются условия предельного равновесия

На рисунке видно, что величины моментов на опоре и в пролете «выровнялись», как и следует из МПР. Было бы интересно посмотреть на графики изменения моментов в зависимости от нагрузки (рисунки 14 и 15), графики изменения жесткости опорного и пролетного сечений (рисунки 16), график прогиба конструкции (рисунок 17) и распределение жесткостей по длине балки (рисунок 18).

¹ Тут можно обратить внимание на то, что $33.50 \neq 34.00$, то есть говорить о «полном совпадении» некорректно. Однако (и на это уже обращалось внимание) величина $q=33.50$ кН/м была получена по результатам расчета сечения по МПУ ($M_{ult}=75.81$ кН×м), тогда как величина $q=34.00$ кН/м была получена по результатам расчета сечения по НДМ ($M_{ult}=76.82$ кН×м). Если и для упругого расчета использовать сразу НДМ, тогда величина предельной нагрузки составила бы $q_{ult} = 12M_{ult}/l_2 = 25.61$ кН/м, а с учетом положений МПР $1.33q_{ult} = 34.14$ кН/м, так что противоречия нет

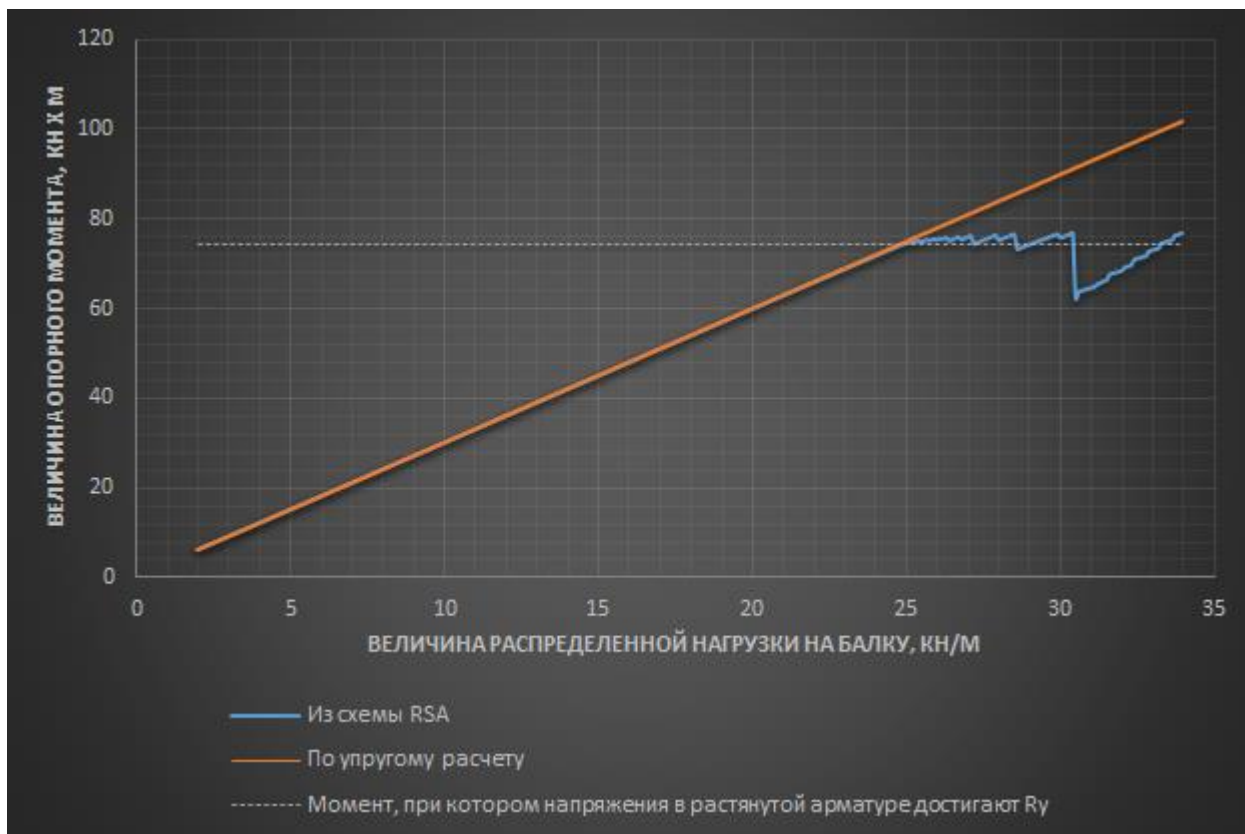


Рисунок 14. График изменения опорного момента в зависимости от нагрузки на балку

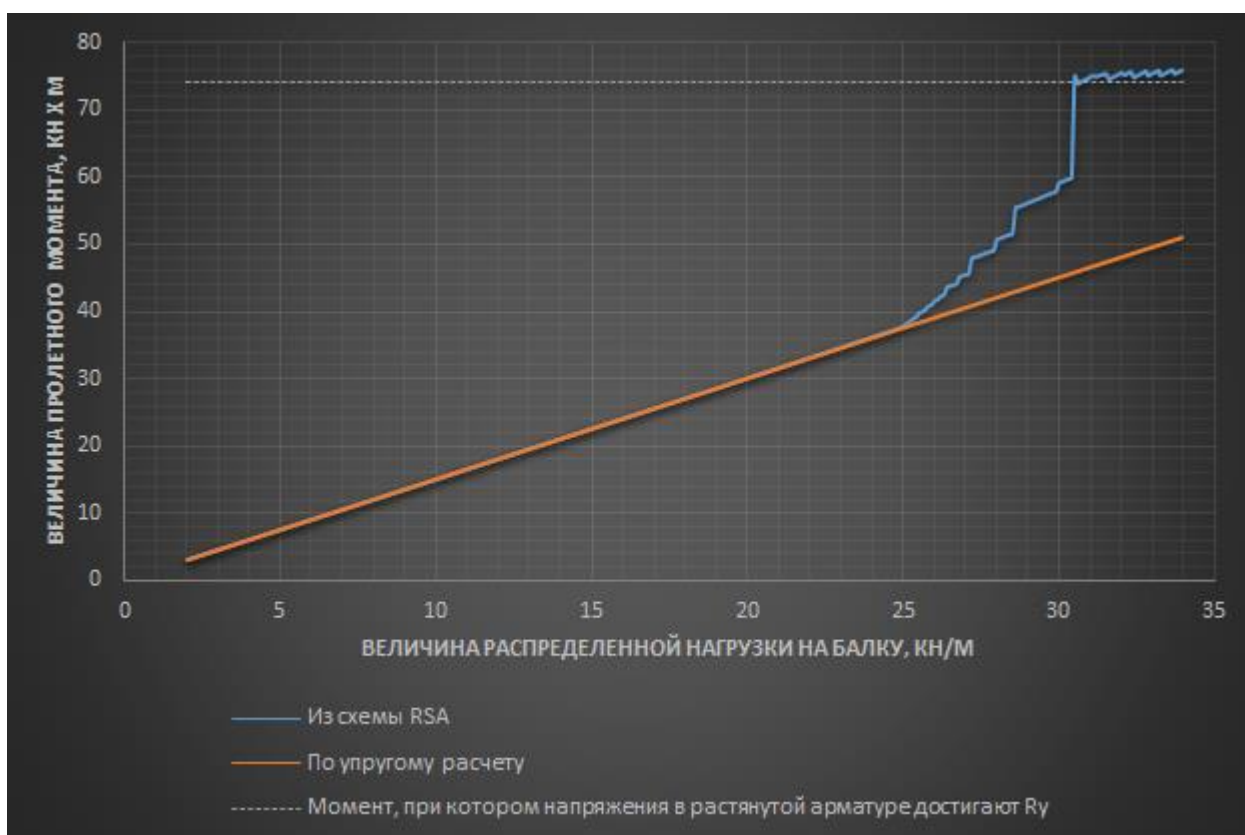


Рисунок 15. График изменения пролетного момента в зависимости от нагрузки на балку

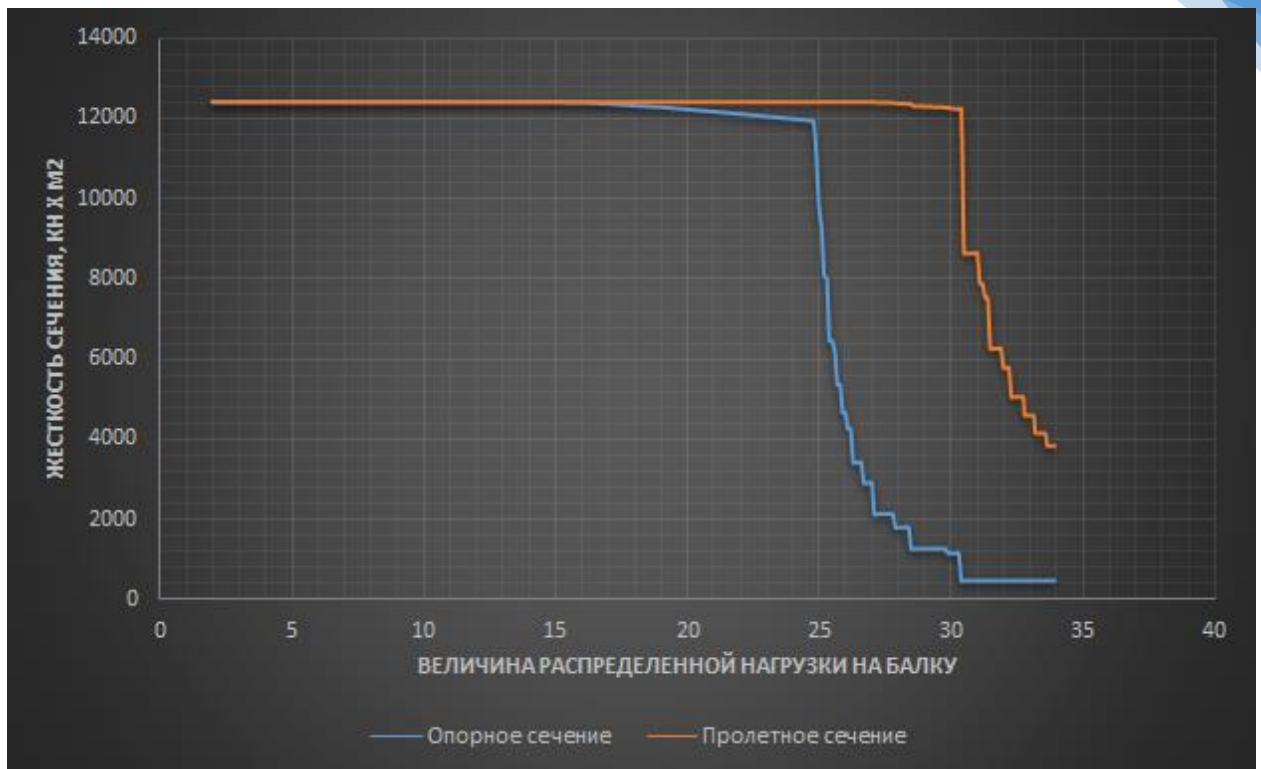


Рисунок 16. График изменения жесткости сечений в зависимости от величины нагрузки на балку

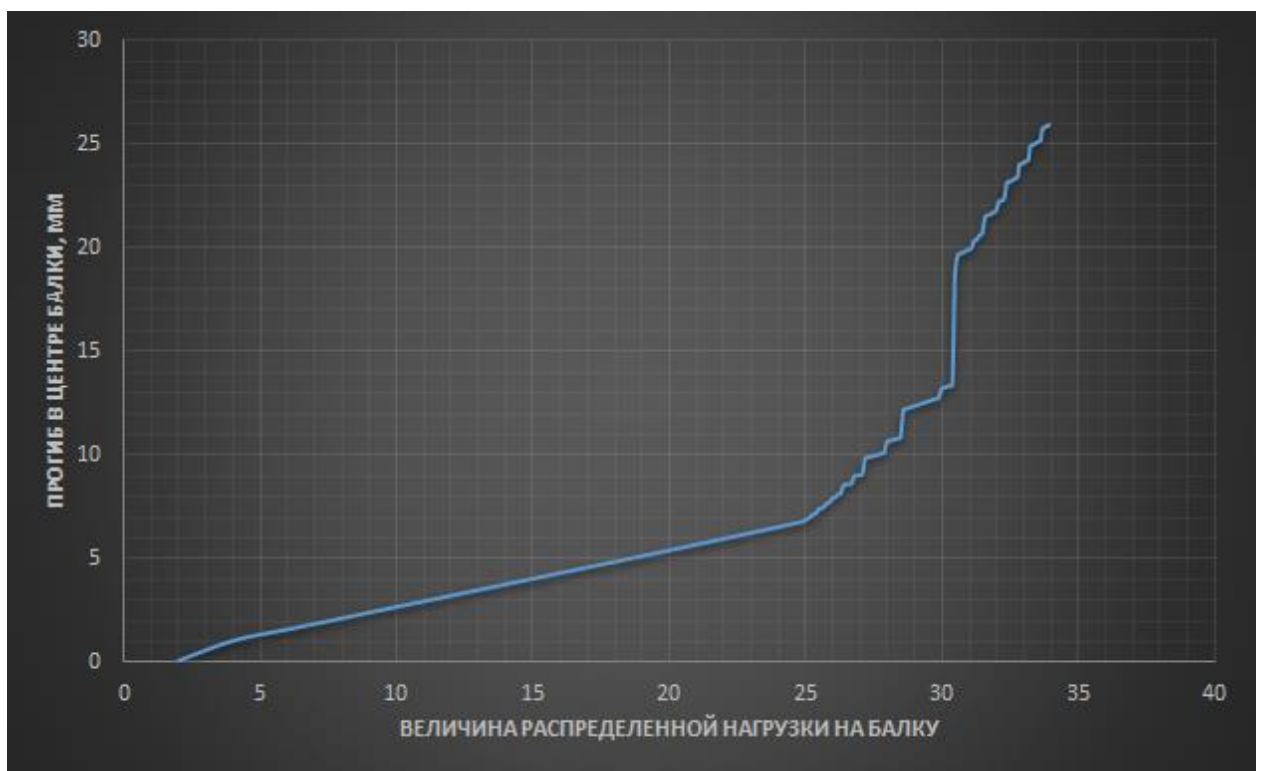


Рисунок 17. График прогиба в центре балки, мм

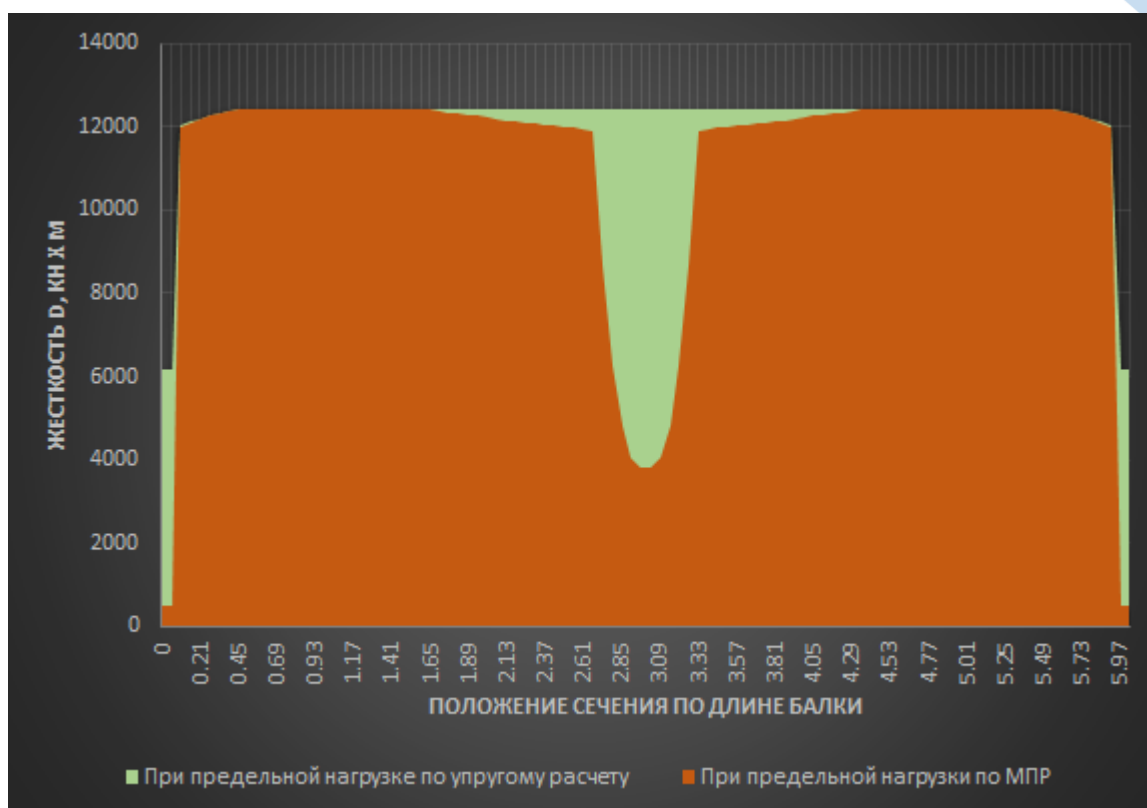


Рисунок 18. Диаграмма распределения жесткости по длине балки при предельной нагрузке по упругому расчету и по МПР

Рисунок 18 показывает механизм разрушения конструкции – то есть видно, что в момент, когда нагрузка на балку близка к предельной, на концах балки жесткость сечений уже незначительна – то есть практически шарнир. Кроме того, новый шарнир образуется и в центре пролета балки, превращая её при следующем шаге нагрузки в мгновенно изменяемую систему (такие системы недопустимы, как и геометрически изменяемые).

«Пилообразный» характер изменения величин (моментов, перемещений) в данном случае связан с тем, что проводился расчет на измененные жесткостные характеристики для всей величины нагрузки, а не только с того момента, как жесткость сечения изменилась. В этом случае, альтернативой может быть полноценный физически нелинейный расчет.

Таким образом, действительно было установлено, что вследствие статической неопределимости конструкции, она обладает возможностью перераспределять усилия так, чтобы несущая способность была увеличена на 33% от результата упругого расчета.

Но для практических целей при проектировании железобетонной конструкции, важна не только несущая способность, но и параметры по второй группе предельных состояний – трещиностойкость и деформации.

6. Трещиностойкость и деформации конструкции

В данном случае не совсем ясно, как проводить расчеты по второй группе предельных состояний – следует ли учитывать то перераспределение усилий, что было достигнуто по результатам расчета несущей способности? Если да – то как? Если нет – то почему?

На мой взгляд, текущий подход к расчету железобетона таков, что **используются две различные расчетные схемы** для расчета по первому и второму предельным состояниям. Судите сами – в процессе расчета принимаются различные величины: нагрузок, характеристик материалов, жесткостей элементов расчетной схемы, по-разному учитывается работа материала (например, растянутый бетон учитывается при расчете по второму предельному состоянию и не учитывается при расчете по первому – в связи с чем и разные жесткости элементов расчетной схемы). А следовательно – **характер работы одной расчетной схемы не должен определять характер работы элементов в другой расчетной схеме**, то есть они должны «самостоятельно» перераспределять усилия.

Соответственно, и трещиностойкость, и деформации конструкции попробуем оценить по **независимой расчетной схеме**, в которой используем уже упомянутый тут алгоритм. Для этой схемы будут характерны иные параметры материалов, нормативные значения нагрузок, а также учет работы растянутого бетона.

Расчет ширины раскрытия трещин будем проводить по СП 63.13330.2012, получая из расчета сечений два важных параметра, входящих в формулу (8.128) СП: напряжения в растянутой арматуре, а также – площадь растянутого бетона, из которой определяется базовое расстояние между трещинами (естественно, на эти параметры накладываем ограничения из нормативных документов, так как работать надо исключительно по ним).

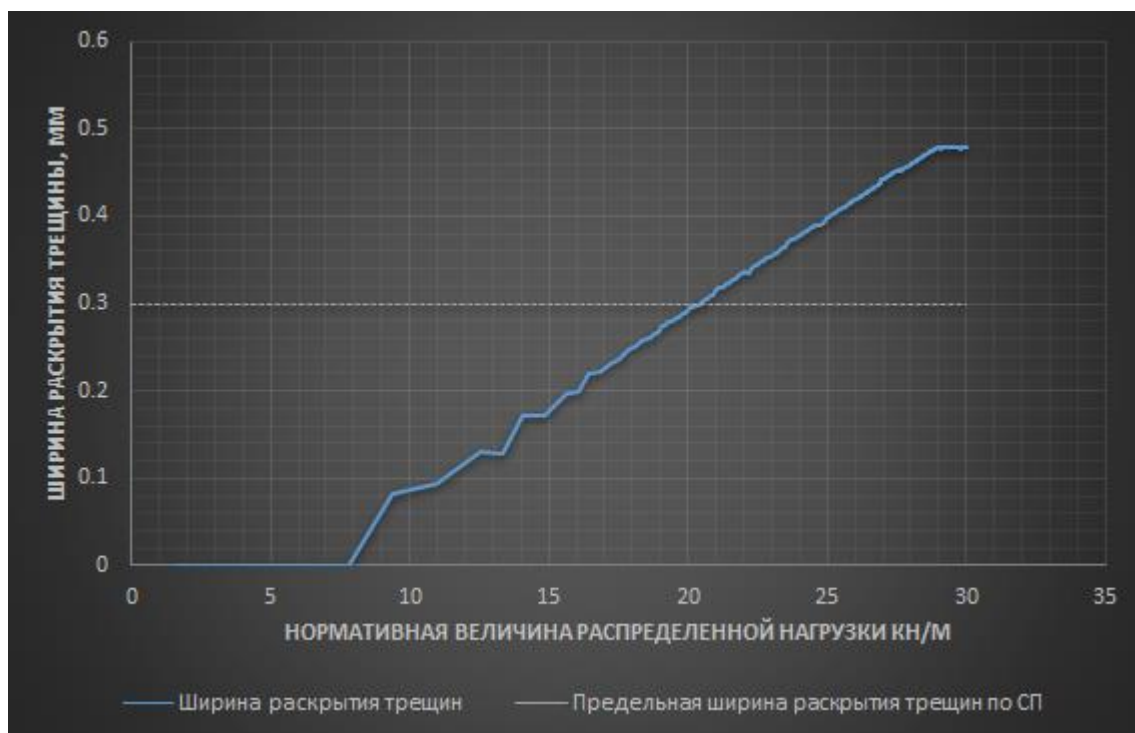


Рисунок 19. График длительной ширины раскрытия трещин в опорном сечении в зависимости от нагрузки

Как видно на рисунке 19, ширина раскрытия трещин достигла предельной при нагрузке $q_n=20.42$ кН/м, что совсем незначительно превышает результат упругого расчета ($q_n=0.9 \times (25.20/1.15)=19.72$ кН/м).

Причина тут в том, что в схеме для расчетов по второму предельному состоянию, элементы не могут распределять нагрузку – напряжения в арматуре далеки от предельных (для А400: $R_{sn}=400$ МПа против $R_s=350$ МПа). Единственная возможность распределения нагрузки – это выход из строя растянутого бетона и образование трещин по длине элемента, но это фактор существенно меньше влияет на жесткость элементов, чем образование пластического шарнира (рисунок 20). Трещины же раскрываются на величину, большую предельной, при напряжениях в арматуре, весьма далеких от предельных значений.

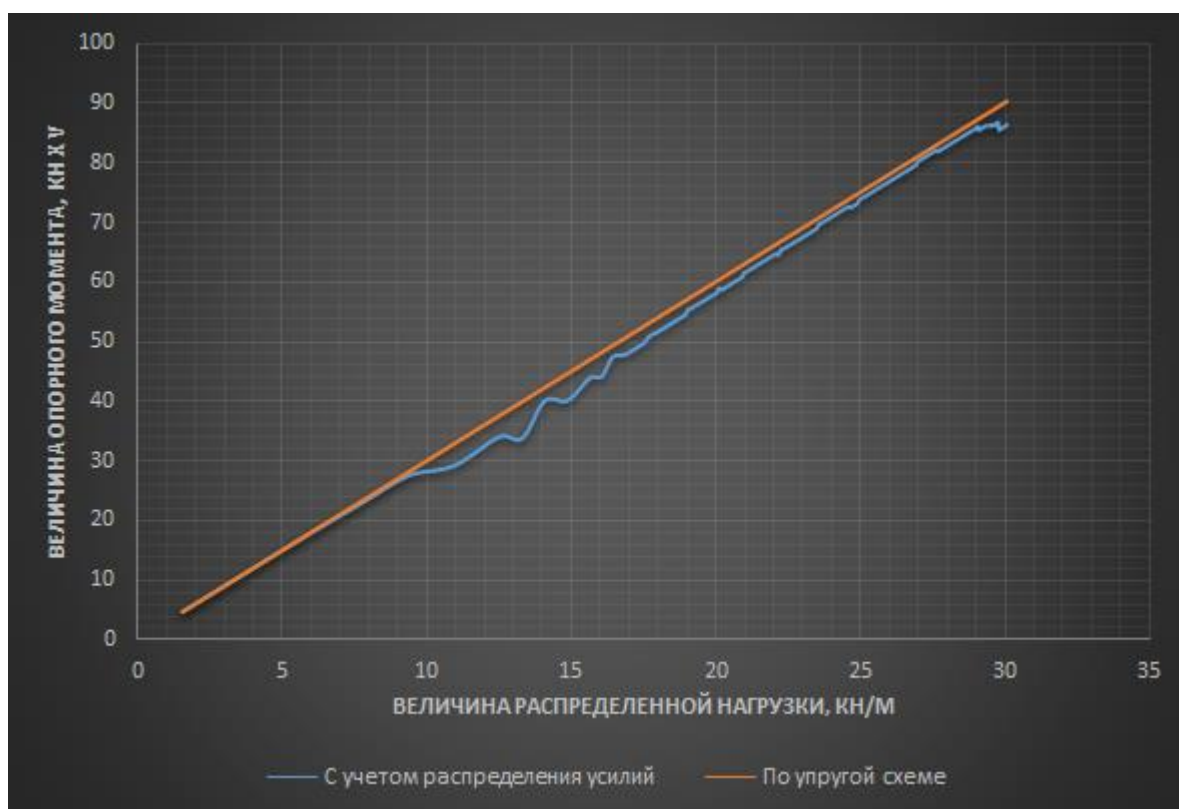


Рисунок 20. График опорного момента для расчетной схемы по второму предельному состоянию

Таким образом, метод предельного равновесия не в состоянии уменьшить ширину раскрытия трещин, а следовательно – в конструкциях, где этот фактор является определяющим, МПР не даст выигрыша по сравнению с упругим расчетом. На рисунке 21 показан график ширины раскрытия трещин в сечениях по длине балки, при нормативных длительных величинах предельных нагрузок на балку, определенных из условия несущей способности, по упругому расчет и по МПР соответственно.

И в заключение - стоит оценить и деформации конструкции. Конечно, в данном случае это не является определяющим фактором, но нормативные документы требуют их проверять. Эпюры прогибов показаны на рисунке 22, а график – на рисунке 23. В обоих случаях, полученная величина далека от предельной $f_{ult}=6000/250=24$ мм.

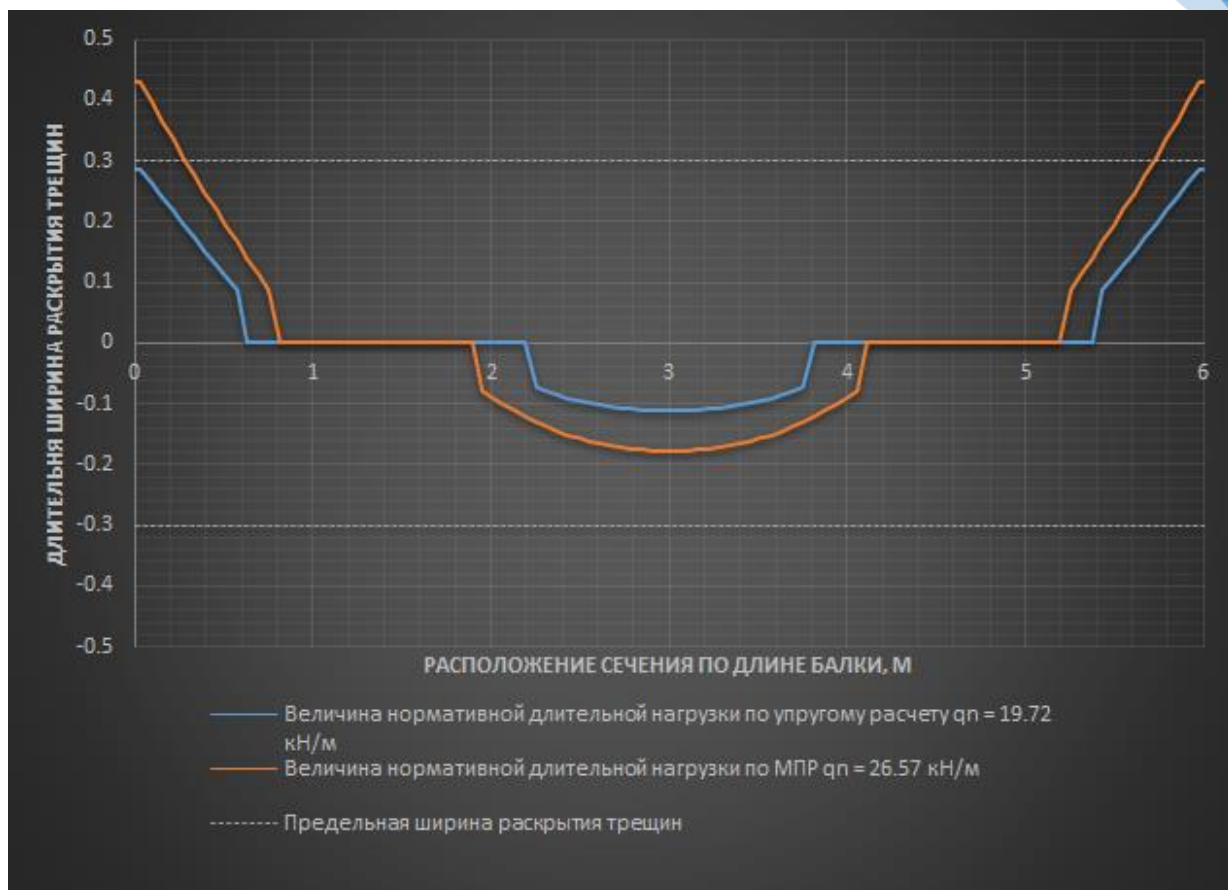


Рисунок 21. Ширина раскрытия трещин по длине балки, мм

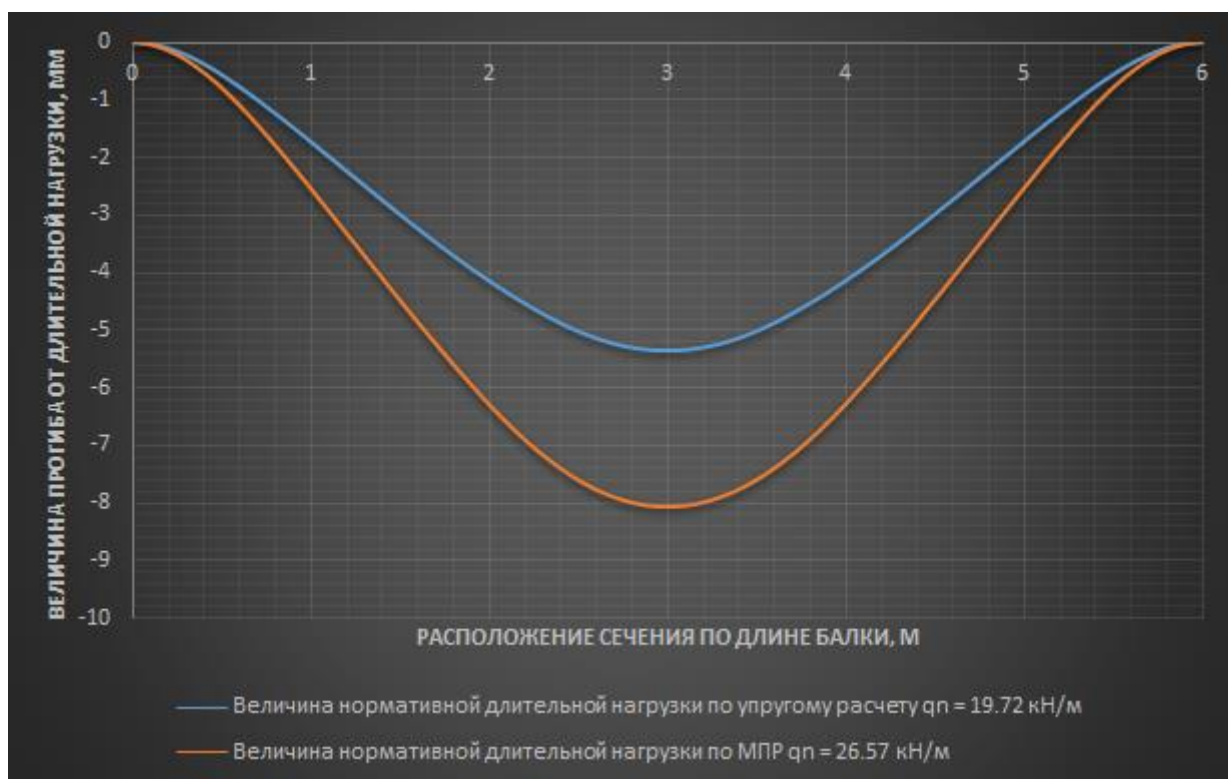


Рисунок 22. Эпюра прогибов по длине балки, мм

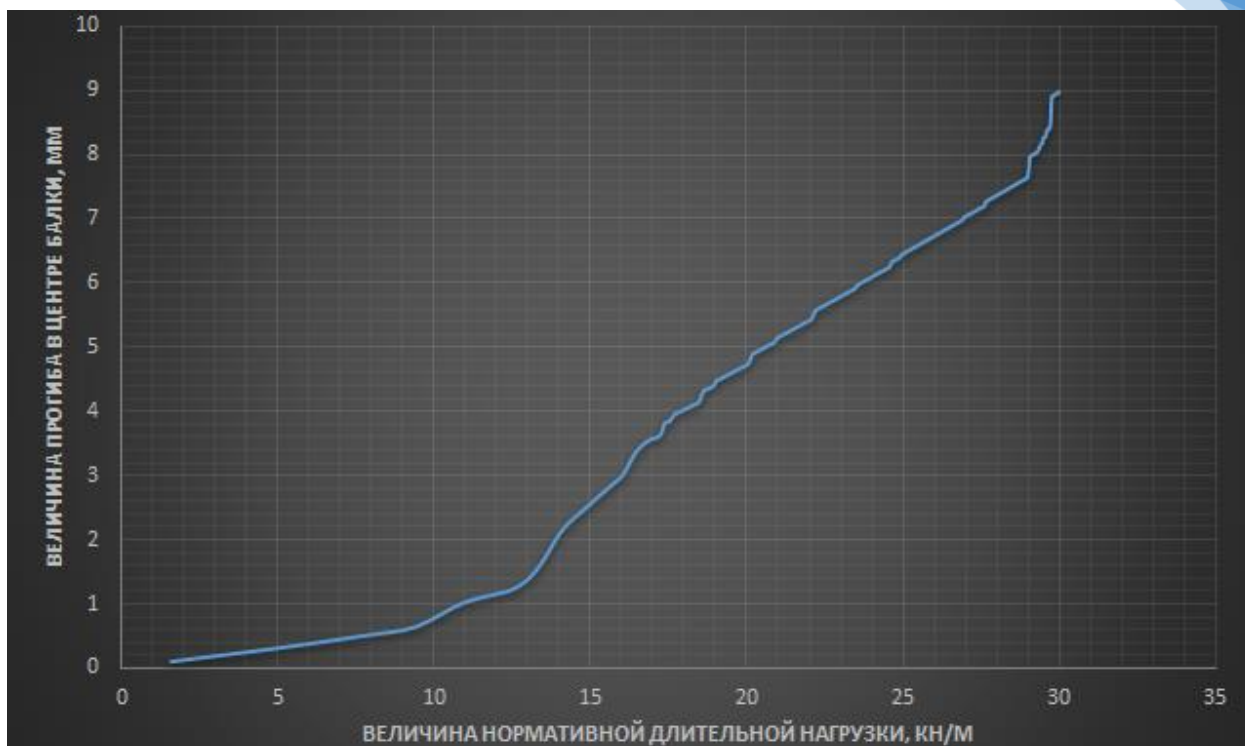


Рисунок 23. График прогиба в центре балки в зависимости от нагрузки

7. Выводы и результаты

По результатам проведенных расчетов можно сделать следующие выводы (особо подчеркну, что эти выводы, как и всё выше написанное, являются моим личным мнением, которое я не пытаюсь никому навязать):

1. Метод предельного равновесия (МПР) – действительно работает и может быть реализован в МКЭ комплексах даже таким, упрощенным образом. Несмотря на это, он дает результаты по несущей способности конструкции, которые довольно близки к теоретическим.
2. Указанный способ позволяет оценивать несущую способность конструкции при произвольном армировании, произвольных нагрузках и произвольных сечениях. При необходимости, макрос вполне может быть дополнен возможностью расчета нескольких групп сечений, а также учетом геометрической нелинейности (деформированной схемы) в RSA в тех случаях, когда это необходимо (<http://dwg.ru/b/igos/123>). В этом случае есть возможность оценивать несущую способность произвольных стержневых систем (рам и т.п.)
3. В тех случаях, когда армирование конструкции диктуется требованиями нормативных документов по трещиностойкости, МПР не дает выигрыша.
4. МПР может быть полезен в первую очередь (мое мнение) в вопросах реконструкции и/или усиления, в случаях, когда были допущены «нештатные» результаты в ходе строительства для оценки несущей способности конструкций.

Список литературы

1. Кальницкий А.А. «Расчет статически неопределимых железобетонных конструкций с учетом перераспределения усилий». Издательство литературы по строительству. Москва, 1970.
2. Блог Ильи Лоскутова: <http://dwg.ru/b/lis>

Приложение 1

Расчет упругой системы МПУ по СП 63.13330.2012

Бетон класса В25:

$$R_b = 14.5 \cdot \text{МПа}$$

$$R_{b_ser} = 18.5 \cdot \text{МПа}$$

$$R_{bt_ser} = 1.55 \cdot \text{МПа}$$

$$E_b = 30 \cdot 10^3 \cdot \text{МПа}$$

Арматура класса А400:

$$R_s = 350 \cdot \text{МПа}$$

$$R_{sc} = 350 \cdot \text{МПа}$$

$$E_s = 2.0 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}$$

Габариты сечения:

$$b = 300 \cdot \text{мм}$$

$$h = 400 \cdot \text{мм}$$

Расстояние от грани до равнодействующей усилий в арматуре: $a = 30 \cdot \text{мм}$

$$a' = 30 \cdot \text{мм}$$

Величина действующей на балку нагрузки
(нагрузка полностью длительная):

$$q = 25.2 \cdot \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

$$\gamma_f = 1.15$$

$$q_n = \frac{q}{\gamma_f} = 21.913 \cdot \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

$$q_{nl} = 0.9 \cdot q_n = 19.722 \cdot \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

Пролет балки: $l = 6 \cdot \text{м}$

Нижняя арматура: $d_{s_b} = 20 \cdot \text{мм}$ $n_{s_b} = 2$

Верхняя арматура: $d_{s_t} = 20 \cdot \text{мм}$ $n_{s_t} = 2$

1. Расчет по прочности

Расчет прочности проводим методом предельных усилий, для опорного и пролетного сечений.

$$M_{оп} = \frac{q \cdot l^2}{12} = 75.6 \cdot \text{кН} \cdot \text{м}$$

$$M_{пр} = \frac{q \cdot l^2}{24} = 37.8 \cdot \text{кН} \cdot \text{м}$$

1.1 Проверка прочности опорного сечения

$$d_s = d_{s_t} = 20 \cdot \text{мм}$$

$$d'_s = d_{s_b} = 20 \cdot \text{мм}$$

$$n_s = n_{s_t} = 2$$

$$n'_s = n_{s_b} = 2$$

$$A_s = n_s \cdot \frac{\pi \cdot d_s^2}{4} = 6.283 \cdot \text{см}^2$$

$$A'_s = n'_s \cdot \frac{\pi \cdot d'_s^2}{4} = 6.283 \cdot \text{см}^2$$

$$h_0 = h - a = 370 \cdot \text{мм}$$

Высота сжатой зоны по формуле (8.5):

$$x = \frac{R_s \cdot A_s - R_{sc} \cdot A'_s}{R_b \cdot b} = 0 \cdot \text{мм}$$

Высота сжатой зоны без учета сжатой арматуры:

$$x = \frac{R_s \cdot A_s}{R_b \cdot b} = 50.554 \cdot \text{мм}$$

Предельный момент сечения по формуле (8.9) с учетом требований п.8.1.13:

$$M_{ult} = R_s \cdot A_s \cdot \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) = 75.809 \cdot \text{кН} \cdot \text{м}$$

$$\frac{M_{оп}}{M_{ult}} = 99.725 \cdot \%$$

1.2 Проверка прочности пролетного сечения

$$d_s = d_{s_b} = 20 \cdot \text{мм}$$

$$d'_s = d_{s_t} = 20 \cdot \text{мм}$$

$$n_s = n_{s_b} = 2$$

$$n'_s = n_{s_t} = 2$$

$$A_s = n_s \cdot \frac{\pi \cdot d_s^2}{4} = 6.283 \cdot \text{см}^2$$

$$A'_s = n'_s \cdot \frac{\pi \cdot d'_s{}^2}{4} = 6.283 \cdot \text{см}^2$$

Высота сжатой зоны по формуле (8.5):

$$x = \frac{R_s \cdot A_s - R_{sc} \cdot A'_s}{R_b \cdot b} = 0 \cdot \text{мм}$$

Высота сжатой зоны без учета сжатой арматуры:

$$x = \frac{R_s \cdot A_s}{R_b \cdot b} = 50.554 \cdot \text{мм}$$

Предельный момент сечения по формуле (8.9) с учетом требований п.8.1.13:

$$M_{ult} = R_s \cdot A_s \cdot \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) = 75.809 \cdot \text{кН} \cdot \text{м}$$

$$\frac{M_{пр}}{M_{ult}} = 49.862 \cdot \%$$

Принятое армирование удовлетворяет требованиям нормативных документов по прочности, переходим к расчету по раскрытию трещин

2. Расчет по раскрытию трещин

Проверку раскрытия трещин производим для опорного и пролетного сечений

$$M_{n_оп} = \frac{q_n \cdot l^2}{12} = 65.739 \cdot \text{кН} \cdot \text{м}$$

$$M_{n_пр} = \frac{q_n \cdot l^2}{24} = 32.87 \cdot \text{кН} \cdot \text{м}$$

$$M_{n_л_оп} = \frac{q_{nl} \cdot l^2}{12} = 59.165 \cdot \text{кН} \cdot \text{м}$$

$$M_{n_л_пр} = \frac{q_{nl} \cdot l^2}{24} = 29.583 \cdot \text{кН} \cdot \text{м}$$

Момент сопротивления бетонного сечения: $W = \frac{b \cdot h^2}{6} = 8000 \cdot \text{см}^3$

Упругопластический момент сопротивления согласно (8.122):

$$W_{pl} = 1.3 \cdot W = 10400 \cdot \text{см}^3$$

Момент раскрытия трещин:

$$M_{crc} = R_{bt_сер} \cdot W_{pl} = 16.12 \cdot \text{кН} \cdot \text{м}$$

2.1 Проверка опорного сечения

$$d_s = d_{s_t} = 20 \cdot \text{мм}$$

$$d'_s = d_{s_b} = 20 \cdot \text{мм}$$

$$n_s = n_{s_t} = 2$$

$$n'_s = n_{s_b} = 2$$

$$A_s = n_s \cdot \frac{\pi \cdot d_s^2}{4} = 6.283 \cdot \text{см}^2$$

$$A'_s = n'_s \cdot \frac{\pi \cdot d_s'^2}{4} = 6.283 \cdot \text{см}^2$$

Высота сжатой зоны без учета сжатой арматуры:

$$x = \frac{R_s \cdot A_s}{R_b \cdot b} = 50.554 \cdot \text{мм}$$

Расстояние от центра тяжести растянутой арматуры до точки приложения равнодействующей усилий в сжатой зоне элемента:

$$z_s = h_0 - \frac{x}{3} = 353.149 \cdot \text{мм}$$

Напряжение в арматуре в момент раскрытия трещин:

$$\sigma_{s_crc} = \frac{M_{crc}}{z_s \cdot A_s} = 72.649 \cdot \text{МПа}$$

Напряжение в арматуре при нормативной нагрузке:

$$\sigma_{s_оп} = \frac{M_{n_оп}}{z_s \cdot A_s} = 296.269 \cdot \text{МПа}$$

Напряжение в арматуре при нормативной длительной нагрузке:

$$\sigma_{sl_оп} = \frac{M_{n_л_оп}}{z_s \cdot A_s} = 266.642 \cdot \text{МПа}$$

Проверяем условие (4.29) Пособия к СП 52-101-2003:

$$\frac{\sigma_{sl_оп} - 0.8 \cdot \sigma_{s_crc}}{\sigma_{s_оп} - 0.8 \cdot \sigma_{s_crc}} = 0.876$$

Полученная величина превышает 0.68, таким образом, допускается проверять только продолжительное раскрытие трещин

Коэффициент приведения арматуры к бетону:

$$\alpha = \frac{E_s}{E_b} = 6.667$$

Площадь приведенного сечения согласно формулы (4.8) Пособия к СП 52-101-2003:

$$A = b \cdot h = 1200 \cdot \text{см}^2$$

$$A_{\text{red}} = A + A_s \cdot \alpha + A'_s \cdot \alpha = 1283.776 \cdot \text{см}^2$$

Статический момент полного приведенного сечения относительно растянутой грани:

$$S_{\text{red}} = A \cdot \frac{h}{2} + A_s \cdot \alpha \cdot a + A'_s \cdot \alpha \cdot h_0 = 25675.516 \cdot \text{см}^3$$

Высота растянутой зоны бетона, определяемая как для упругого материала:

$$y_t = \frac{S_{\text{red}}}{A_{\text{red}}} = 200 \cdot \text{мм}$$

Высота растянутой зоны бетона по формуле (4.23) Пособия к СП 52-101-2003:

$$k = 0.9$$

$$y = k \cdot y_t = 180 \cdot \text{мм}$$

Площадь сечения растянутого бетона: $A_{bt} = \min(\max(2 \cdot a \cdot b, b \cdot y_t), 0.5 \cdot h \cdot b) = 600 \cdot \text{см}^2$

Таким образом, значение базового расстояния между трещинами определяется по формуле (8.136):

$$l_s = \min\left(\max\left(0.5 \cdot \frac{A_{bt}}{A_s} \cdot d_s, 10 \cdot d_s, 10 \cdot \text{см}\right), 40 \cdot d_s, 40 \cdot \text{см}\right) = 400 \cdot \text{мм}$$

Коэффициент, учитывающий неравномерное распределение относительной деформации растянутой арматуры между трещинами:

$$\psi_s = 1 - 0.8 \cdot \frac{\sigma_{s_cpc}}{\sigma_{sl_оп}} = 0.782$$

Коэффициент учитывающий продолжительность нагрузки принимается равным:

$$\varphi_1 = 1.4$$

Коэффициент, учитывающий профиль продольной арматуры при использовании арматуры периодического профиля:

$$\varphi_2 = 0.5$$

Коэффициент, учитывающий характер нагружения изгибаемого элемента:

$$\varphi_3 = 1.0$$

Таким образом, ширина раскрытия нормальных трещин по формуле (8.128):

$$a_{cpc} = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot \psi_s \cdot \frac{\sigma_{sl_оп}}{E_s} \cdot l_s = 0.292 \cdot \text{мм}$$

$$\frac{a_{cpc}}{0.3 \cdot \text{мм}} = 97.311 \cdot \%$$

2.2 Проверка пролетного сечения

$$d_s = d_{s_b} = 20 \cdot \text{мм}$$

$$d'_s = d_{s_t} = 20 \cdot \text{мм}$$

$$n_s = n_{s_b} = 2$$

$$n'_s = n_{s_t} = 2$$

$$A_s = n_s \cdot \frac{\pi \cdot d_s^2}{4} = 6.283 \cdot \text{см}^2$$

$$A'_s = n'_s \cdot \frac{\pi \cdot d_s'^2}{4} = 6.283 \cdot \text{см}^2$$

Напряжение в арматуре при нормативной нагрузке:

$$\sigma_{s_np} = \frac{M_{n_np}}{z_s \cdot A_s} = 148.135 \cdot \text{МПа}$$

Напряжение в арматуре при нормативной длительной нагрузке:

$$\sigma_{sl_np} = \frac{M_{n_l_np}}{z_s \cdot A_s} = 133.321 \cdot \text{МПа}$$

Проверяем условие (4.29) Пособия к СП 52-101-2003:

$$\frac{\sigma_{sl_np} - 0.8 \cdot \sigma_{s_crc}}{\sigma_{s_np} - 0.8 \cdot \sigma_{s_crc}} = 0.835$$

Полученная величина превышает 0.68, таким образом, допускается проверять только продолжительное раскрытие трещин

Коэффициент приведения арматуры к бетону:

$$\alpha = \frac{E_s}{E_b} = 6.667$$

Площадь приведенного сечения согласно формулы (4.8) Пособия к СП 52-101-2003:

$$A = b \cdot h = 1200 \cdot \text{см}^2$$

$$A_{red} = A + A_s \cdot \alpha + A'_s \cdot \alpha = 1283.776 \cdot \text{см}^2$$

Статический момент полного приведенного сечения относительно растянутой грани:

$$S_{red} = A \cdot \frac{h}{2} + A_s \cdot \alpha \cdot a + A'_s \cdot \alpha \cdot h_0 = 25675.516 \cdot \text{см}^3$$

Высота растянутой зоны бетона, определяемая как для упругого материала:

$$y_t = \frac{S_{red}}{A_{red}} = 200 \cdot \text{мм}$$

Высота растянутой зоны бетона по формуле (4.23) Пособия к СП 52-101-2003:

$$k = 0.9$$

$$y = k \cdot y_t = 180 \cdot \text{мм}$$

Площадь сечения растянутого бетона: $A_{bt} = \min(\max(2 \cdot a \cdot b, b \cdot y_t), 0.5 \cdot h \cdot b) = 600 \cdot \text{см}^2$

Таким образом, значение базового расстояния между трещинами определяется по формуле (8.136):

$$l_s = \min \left(\max \left(0.5 \cdot \frac{A_{bt}}{A_s} \cdot d_s, 10 \cdot d_s, 10 \cdot \text{см} \right), 40 \cdot d_s, 40 \cdot \text{см} \right) = 400 \cdot \text{мм}$$

Коэффициент, учитывающий неравномерное распределение относительной деформации растянутой арматуры между трещинами:

$$\psi_s = 1 - 0.8 \cdot \frac{\sigma_{s_crc}}{\sigma_{s_np}} = 0.608$$

Коэффициент учитывающий продолжительность нагрузки принимается равным:

$$\varphi_1 = 1.4$$

Коэффициент, учитывающий профиль продольной арматуры при использовании арматуры периодического профиля:

$$\varphi_2 = 0.5$$

Коэффициент, учитывающий характер нагружения изгибаемого элемента:

$$\varphi_3 = 1.0$$

Таким образом, ширина раскрытия нормальных трещин по формуле (8.128):

$$a_{crc} = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot \psi_s \cdot \frac{\sigma_{s_np}}{E_s} \cdot l_s = 0.126 \cdot \text{мм}$$

$$\frac{a_{crc}}{0.3 \cdot \text{мм}} = 42.007 \cdot \%$$

2. Расчет по деформациям (прогиб элемента)

Прогиб элемента будем определять только от длительной нагрузки (в целях упрощения)

Коэффициенты армирования: $\mu_s = \frac{A_s}{b \cdot h_0} = 0.566 \cdot \%$

$$\mu'_s = \frac{A'_s}{b \cdot h_0} = 0.566 \cdot \%$$

Коэффициенты приведения арматуры к бетону:

$$\epsilon_{b1_red} = 0.0015$$

$$E_{b_red} = \frac{R_{b_ser}}{\epsilon_{b1_red}} = 12333.333 \cdot \text{МПа}$$

$$\alpha_{s1} = \frac{E_s}{E_{b_red}} = 16.216$$

$$\psi_s = 1 - 0.8 \cdot \left[\frac{M_{crc}}{\begin{pmatrix} M_{n_1_on} \\ M_{n_1_np} \\ M_{n_1_on} \end{pmatrix}} \right] = \begin{pmatrix} 0.782 \\ 0.564 \\ 0.782 \end{pmatrix}$$

$$E_{s_red} = \frac{E_s}{\psi_s} = \begin{pmatrix} 255743.325 \\ 354567.057 \\ 255743.325 \end{pmatrix} \cdot \text{МПа}$$

$$\alpha_{s2} = \frac{E_{s_red}}{E_{b_red}} = \begin{pmatrix} 20.736 \\ 28.749 \\ 20.736 \end{pmatrix}$$

Высота сжатой зоны из формулы (8.151):

$$x_m = h_0 \cdot \left[\sqrt{(\mu_s \cdot \alpha_{s2} + \mu'_s \cdot \alpha_{s1})^2 + 2 \cdot \left(\mu_s \cdot \alpha_{s2} + \mu'_s \cdot \alpha_{s1} \right) \cdot \frac{a'}{h_0}} - (\mu_s \cdot \alpha_{s2} + \mu'_s \cdot \alpha_{s1}) \right] = \begin{pmatrix} 123.02 \\ 141.331 \\ 123.02 \end{pmatrix} \cdot \text{мм}$$

Расстояние от центра тяжести растянутой арматуры до точки приложения равнодействующей усилий в сжатой зоне, определяем из условия п. 8.2.29:

$$z = 0.8 \cdot h_0 = 0.296 \text{ м}$$

Таким образом, жесткость железобетонного элемента по сечениям составит:

$$D_{оп} = E_{s_red0} \cdot A_s \cdot z \cdot (h_0 - x_{m0}) = 11747.302 \cdot \text{кН} \cdot \text{м}^2$$

$$D_{пр} = E_{s_red1} \cdot A_s \cdot z \cdot (h_0 - x_{m1}) = 15079.155 \cdot \text{кН} \cdot \text{м}^2$$

$$D_{оп} = E_{s_red2} \cdot A_s \cdot z \cdot (h_0 - x_{m2}) = 11747.302 \cdot \text{кН} \cdot \text{м}^2$$

Далее определяем кривизну сечений по длине элемента. Будем определять кривизну в трех точках: в центре элемента и по краям

$$v_r = \begin{pmatrix} \frac{M_{n_l_оп}}{D_{оп}} \\ -\frac{M_{n_l_пр}}{D_{пр}} \\ \frac{M_{n_l_оп}}{D_{оп}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.005 \\ -0.002 \\ 0.005 \end{pmatrix} \cdot \text{м}^{-1}$$

Вектор сечений кривизны: $v_{xr} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \cdot l \\ 1 \end{pmatrix}$

Вектор для кубической интерполяции функции кривизны:

$$x_{rx} = \text{cspline}(v_{xr}, v_r)$$

Функция кривизны по длине балки:

$$r_x(x) = \text{interp}(x_{rx}, v_{xr}, v_r, x)$$

Сечение, в котором будет вычисляться прогиб: $\text{sect} = 0.5 \cdot l$

Вектор сечений единичного момента: $v_{xm} = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{sect} \\ 1 \end{pmatrix}$

Вектор единичных моментов по длине элемента: $v_{mx} = \begin{pmatrix} 0.75 \cdot \text{м} \\ -0.75 \cdot \text{м} \\ 0.75 \cdot \text{м} \end{pmatrix}$

Функция единичного момента по длине балки:

$$m_x(x) = \text{linterp}(v_{xm}, v_{mx}, x)$$

Величину прогиба определяем по формуле (4.31) Пособия к СП 52-101-2003:

$$f_{m1} = \int_0^l r_x(x) \cdot m_x(x) dx = 5.249 \cdot \text{мм}$$