

## 1. Введение

В предыдущем посте (<http://dwg.ru/b/igos/152>), когда на довольно типичной статически неопределимой конструкции (балка с двумя защемлениями по краям, расчет без учета распора) была продемонстрирована процедура перераспределения усилий (изгибающих моментов), опытные инженеры-практики обратили внимание на следующее обстоятельство – выбранная конструкция не была оптимальной с точки зрения упругого расчета. И действительно – при отношении величин изгибающих моментов  $M_{оп}/M_{пр} = 2$ , продольное армирование балки (и верхнее, и нижнее) было принято одинаковым, что некорректно с точки зрения оптимального расхода материалов.

В этой связи, в данном посте будет проведена попытка расчета с перераспределением усилий для балки, в которой арматура соответствует упругому расчету (в данном посте все расчеты будут проводиться с точки зрения несущей способности конструкции, не обращая внимания на расчеты по второй группе предельных состояний).

## 2. Постановка тестовой задачи

Тестовая задача в данном посте будет аналогична задаче из предыдущего поста, за исключением армирования.

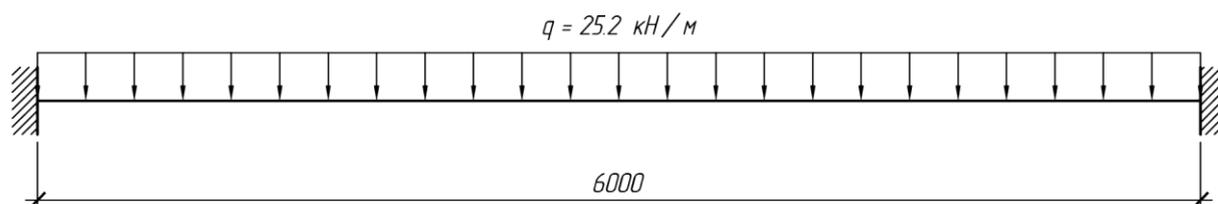


Рисунок 1. Тестовая задача с расчетной нагрузкой

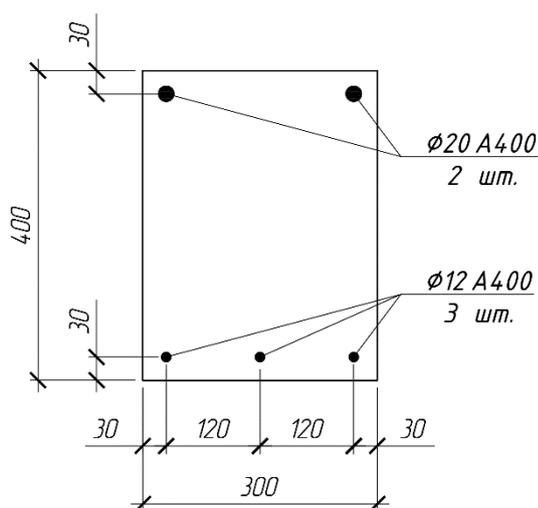


Рисунок 2. Сечение элемента тестовой задачи

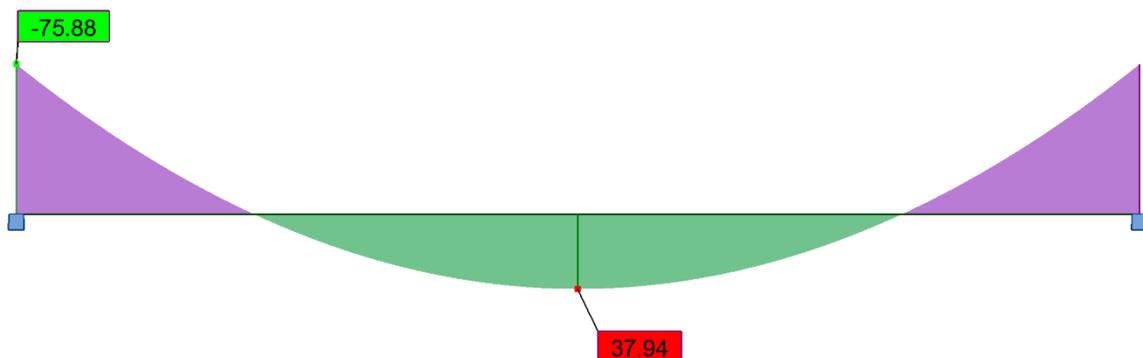


Рисунок 3. Эпюра изгибающих моментов в балке при расчетной нагрузке

Таблица 1. Параметры расчетной схемы

Параметры расчетной схемы	
Класс бетона:	B25
Класс арматуры:	A400
Величина расчетной нагрузки:	$q = 25.20 \text{ кН/м}$
Величина нормативной нагрузки (принят довольно типичный коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f=1.15$ ):	$q_n = 21.91 \text{ кН/м}$
Доля длительности нагрузки (отношение постоянных и длительных нагрузок к общей величине нагрузки)	0.90

Таблица 2. Результаты расчета по упругой схеме

Результаты расчета по «упругой схеме»*	
Опорное сечение:	
– величина расчетного момента:	$M_{оп}=75.88 \text{ кН}\times\text{м}$
– величина предельного момента при принятом армировании:	$M_{ult}=76.55 \text{ кН}\times\text{м}$
– коэффициент использования сечения по прочности:	<b>0.991</b>
– площадь арматуры $A_s$ :	$6.28 \text{ см}^2$
Пролетное сечение:	
– величина расчетного момента:	$M_{пр}=37.94 \text{ кН}\times\text{м}$
– величина предельного момента при принятом армировании:	$M_{ult}=42.10 \text{ кН}\times\text{м}$
– коэффициент использования сечения по прочности:	<b>0.901</b>
– площадь арматуры $A_s$ :	$3.39 \text{ см}^2$

\* - во избежание путаницы, все величины предельных усилий, указанные в таблице, вычислены по НДМ

То есть конструкция запроектирована таким образом, что у нее фактически нет «резервов» - армирование по всем опорному и пролетному сечениям принято без «запасов».

Алгоритм определения несущей способности балки соответствует описанному в предыдущем посте (<http://dwg.ru/b/igos/152>)

### 3. Расчет балки, армированной по упругому расчету

Результаты расчетов в данном случае ожидаемо другие - величина предельной нагрузки, достигнутой конструкцией до разрушения, составила  $q_{ult}=26.35$  кН/м, то есть всего на 4.6% больше от предельной нагрузки по результатам упругого расчета (ни о каких 30% процентах увеличения нагрузки речи в данном случае не идет).

Посмотрим подробнее на полученные результаты. Графики опорного и пролетного моментов приведены на рисунках 4 и 5 соответственно.

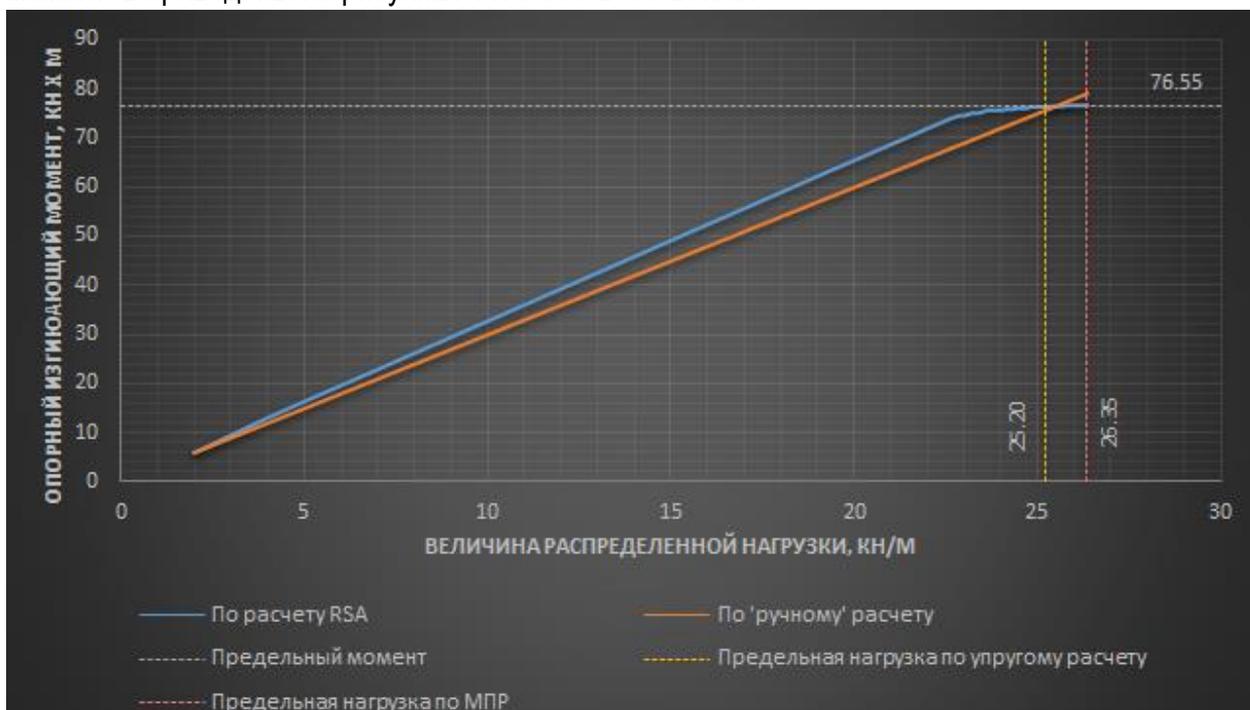


Рисунок 4. График изменения опорного момента в зависимости от нагрузки на балку

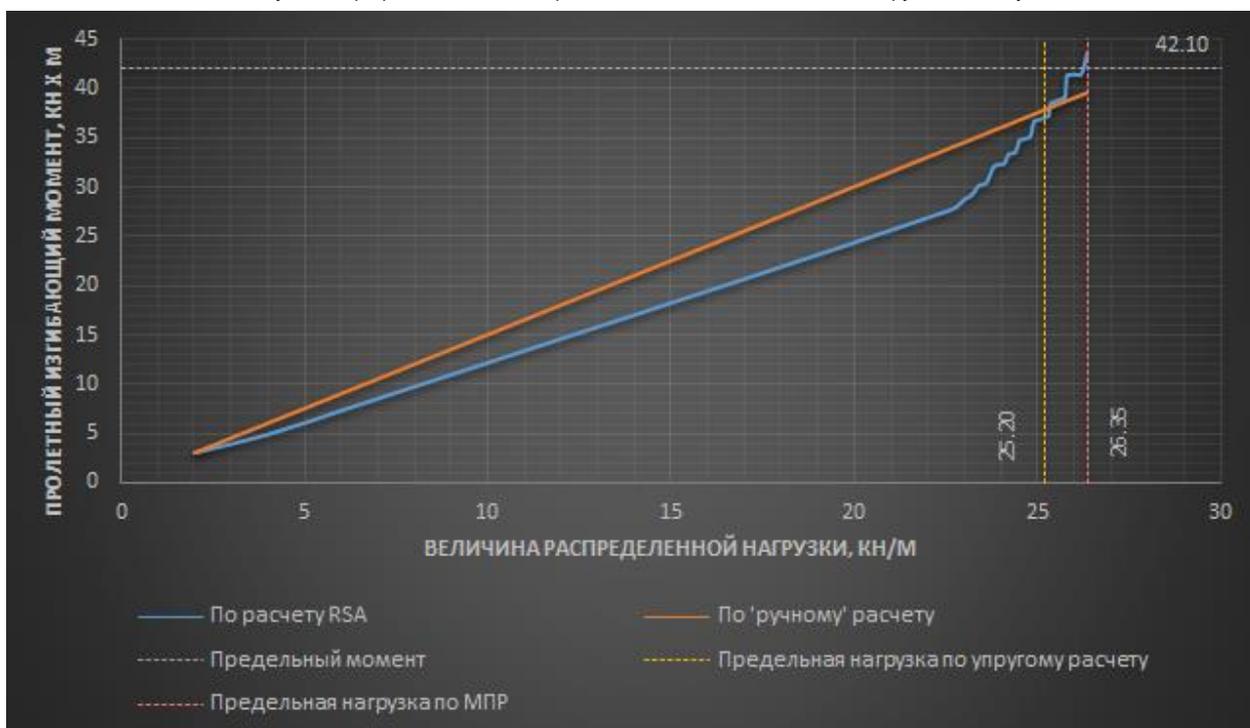


Рисунок 5. График изменения пролетного момента в зависимости от нагрузки на балку

В данном случае интересно следующее обстоятельство – величина опорного момента практически с самого начала загрузки несколько «опережает» величину, определяемую по «ручному расчету»<sup>1</sup>, а с пролетным моментом ситуация обратная. При достижении предельной нагрузки по упругому расчету, величины усилий, вычисленные по МКЭ и «ручным» способом, начинают совпадать, а далее уже пролетное сечение конструкции перестает воспринимать усилия, что означает разрушение конструкции.

В чем причина возникновения различных усилий в такой простой конструкции?

Дело в том, что изгибная жесткость балки по длине, с учетом знакопеременного момента, с учетом различного армирования сверху и снизу не является постоянной величиной. Значение изгибной жесткости можно получить из формулы (8.142) СП 63.13330.2012 по выражению:

$$D = \frac{M}{(1/r)}$$

где  $M$  - величина действующего момента

$(1/r)$  - кривизна продольной оси в поперечном сечении элемента в плоскости действия момента

Интуитивно понятно, что одно и то же сечение, с разной арматурой сверху и снизу, по-разному будет сопротивляться действию изгибающего момента, одинакового по величине, но различного по направлению. Следовательно, и величина кривизны продольной оси сечения будет разной, а, следовательно, и его жесткость.

Посмотрим, как меняется жесткость сечения балки по длине, с учетом изменения величины нагрузки. Стоит обратить внимание, что жесткость вычислена как для сечения, работающего по первой группе предельных состояний, то есть без учета работы растянутого бетона.

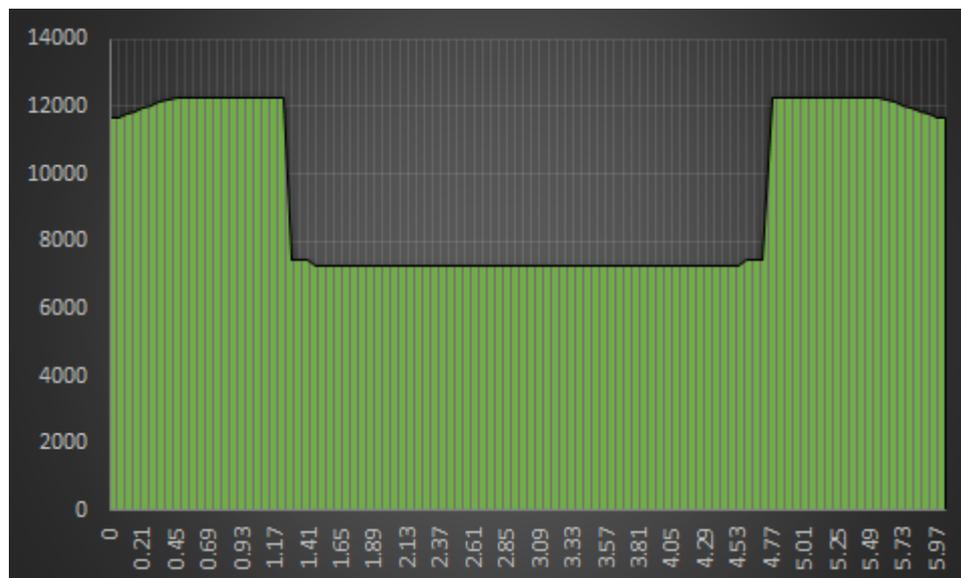


Рисунок 6. Эпюра изгибной жесткости балки  $D$ ,  $\text{кН}\times\text{м}^2$  при расчетной нагрузке  $q=20 \text{ кН/м}$  (безопасная величина нагрузки)

<sup>1</sup> Под «ручным расчетом» понимаются известные формулы  $M_{\text{оп}} = ql^2/12$  и  $M_{\text{пр}} = ql^2/24$ .

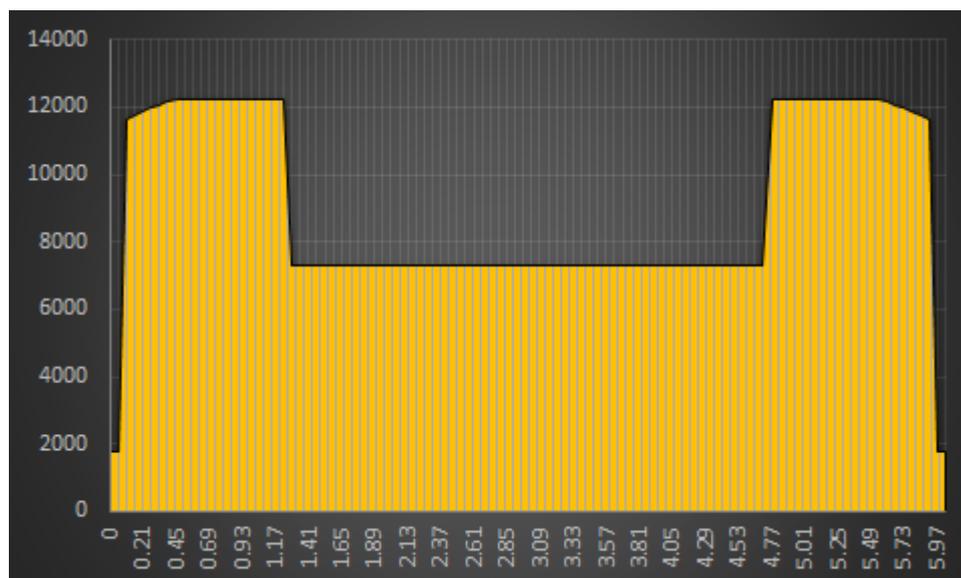


Рисунок 7. Эюра изгибной жесткости балки D,  $\text{kN}\cdot\text{m}^2$  при расчетной нагрузке  $q=25.2 \text{ kN/m}$  (предельная нагрузка по упругому расчету)

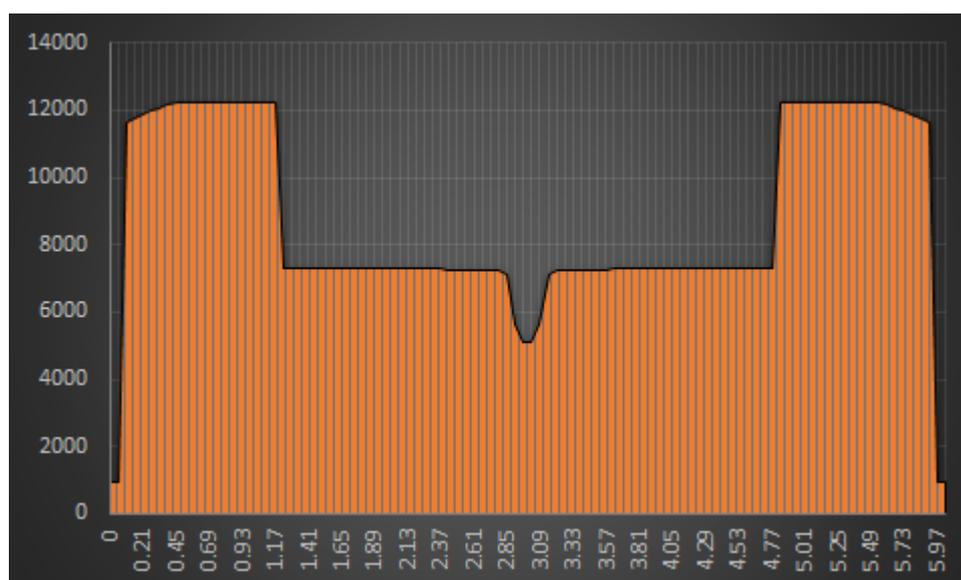


Рисунок 8. Эюра изгибной жесткости балки D,  $\text{kN}\cdot\text{m}^2$  при расчетной нагрузке  $q=26.35 \text{ kN/m}$  (предельная нагрузка по МПР)

Приведены три состояния балки:

- «безопасная» расчетная нагрузка  $q=20 \text{ kN/m}$  (рисунок 6). Жесткость сечений, работающих на опорный (отрицательный) момент превышает жесткость сечений, работающих на пролетный (положительный) момент;
- предельная расчетная нагрузка по «упругому» расчету  $q=25.2 \text{ kN/m}$  (рисунок 7). Жесткость опорных сечений начинает падать, жесткость пролетных пока постоянна;
- предельная расчетная нагрузка по МПР  $q=26.35 \text{ kN/m}$  (рисунок 8). Жесткость опорных сечений снизилась, в пролете формируется пластический шарнир.

Таким образом, подобное распределение моментов по длине балки (рисунки 4 и 5) довольно логично – как и в любой статически неопределимой системе, элемент с большей жесткостью берет на себя большую часть усилия.

К жесткостям еще вернемся далее, но перед этим подведем итог проверки данной конструкции, запроектированной строго по упругому расчету. Резюме следующее: перераспределение усилий не привело к существенному повышению несущей способности конструкции, по той причине, что момент, действующий в пролете до образования опорных пластических шарниров, был близок к предельному моменту сечения. То есть для того, чтобы перераспределять усилия, надо, чтобы было куда их перераспределять – данная конструкция этому критерию не соответствует.

А вот дальше возникает интересное обстоятельство. Ведь если дело в том, что для перераспределения усилий, необходимо чтобы было, куда их распределять, то формально «перевернув» арматуру (то есть поставить верхнюю вниз и наоборот), можно получить балку такой же несущей способности? Верхняя арматура (3Ø12A400) достигнет предела текучести, в ней возникнет пластический шарнир, и усилия «перетекут» в пролетный момент, где нижняя арматура (2Ø20A400) будет способна их воспринять. То есть получается, что несущая способность данной конструкции не зависит от того, где расположена арматура, а лишь от того, сколько её расположено в сечении?

Постараемся проверить это на «практике» численного расчета.

#### 4. Расчет балки с «обратным» армированием

Сечение балки приведено на рисунке 9.

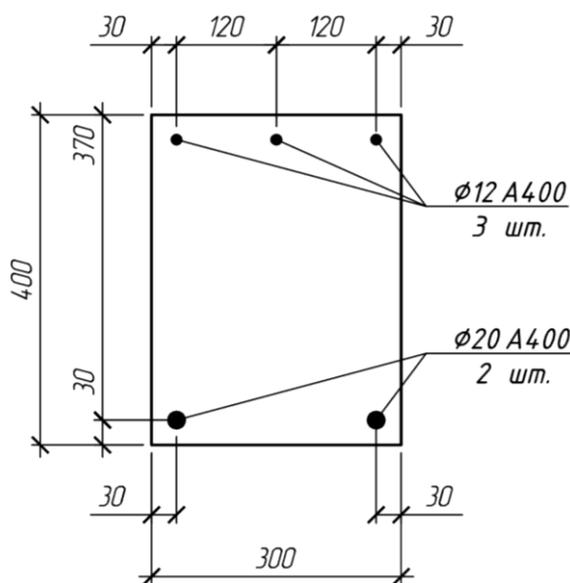


Рисунок 9. Сечение элемента с «обратным» армированием

Согласно упругому расчету, величина предельной нагрузки будет определяться прочностью опорного сечения и составит:

$$q_{ult} = \frac{12M_{ult}}{l^2} = \frac{12 \cdot 42.10}{6^2} = 14.03 \text{ кН/м}$$

Но следуя МПР [1], нагрузку на балку можно увеличить, исходя из того, что при нагрузке  $q=14.03$  кН/м, опорные сечения перейдут в состояние «пластического шарнира», разрушение

балки будет происходить в пролете, и увеличение нагрузки будет давать лишь увеличение пролетного момента. Тогда величина данной дополнительной нагрузки  $\Delta q$  будет определена из уравнения:

$$M_{ult} = \frac{ql^2}{24} + \frac{\Delta ql^2}{8}$$

где  $M_{ult}$  - предельный момент, воспринимаемый пролетным сечением,  $M_{ult} = 76.55 \text{ кН} \times \text{м}$ ;

$q$  - несущая способность балки по результатам упругого расчета

Решая данное уравнение, получаем  $\Delta q = 12.33 \text{ кН/м}$ , таким образом  $q_{\text{общ}} = 26.36 \text{ кН/м}$ , что фактически равно величине предельной нагрузки, полученной в предыдущей главе. То есть получается, что с точки зрения несущей способности нет разницы, как располагать армирование?

Рисунки 10 - 12 иллюстрируют гипотетическое распределение моментов, а рисунок 13 – распределение моментов по упругому расчету при предельной нагрузке.

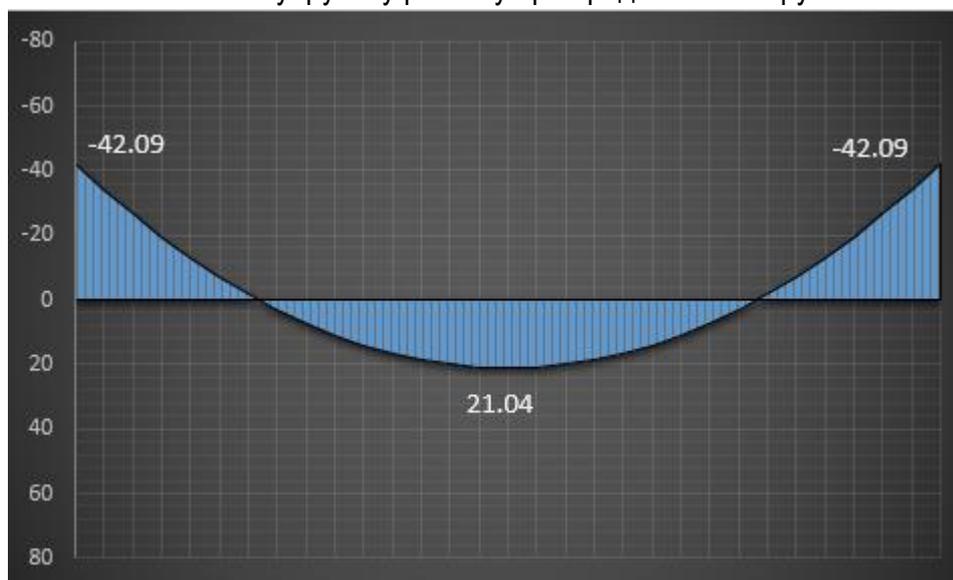


Рисунок 10. Эюра изгибающего момента в балке по упругому расчету, М, кН×м при нагрузке  $q=14.03 \text{ кН/м}$  (первое слагаемое)

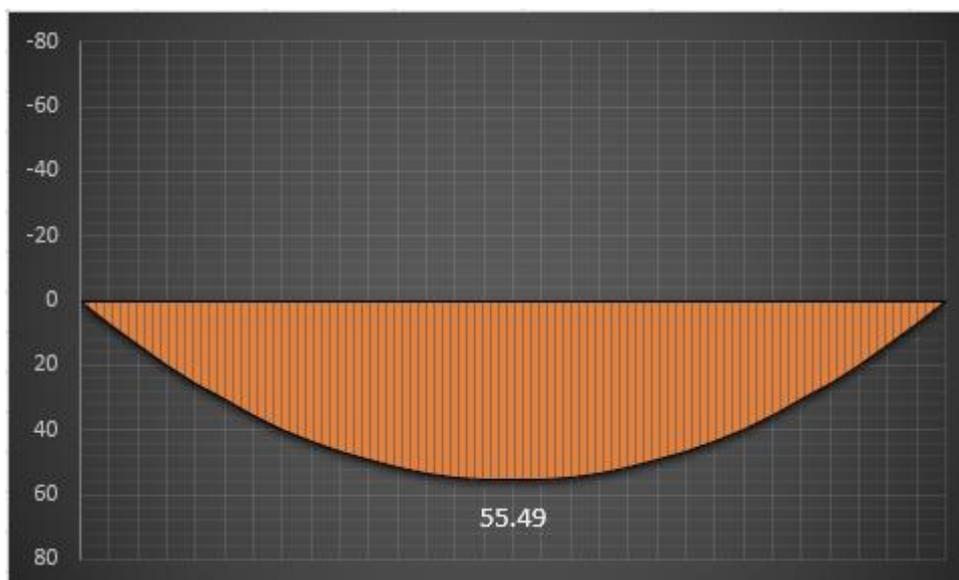


Рисунок 11. Гипотетическая эюра изгибающего момента в балке, М, кН×м от дополнительной нагрузки  $\Delta q=12.33 \text{ кН/м}$  в предположении образования пластических шарниров в опорных сечениях балки (второе слагаемое)

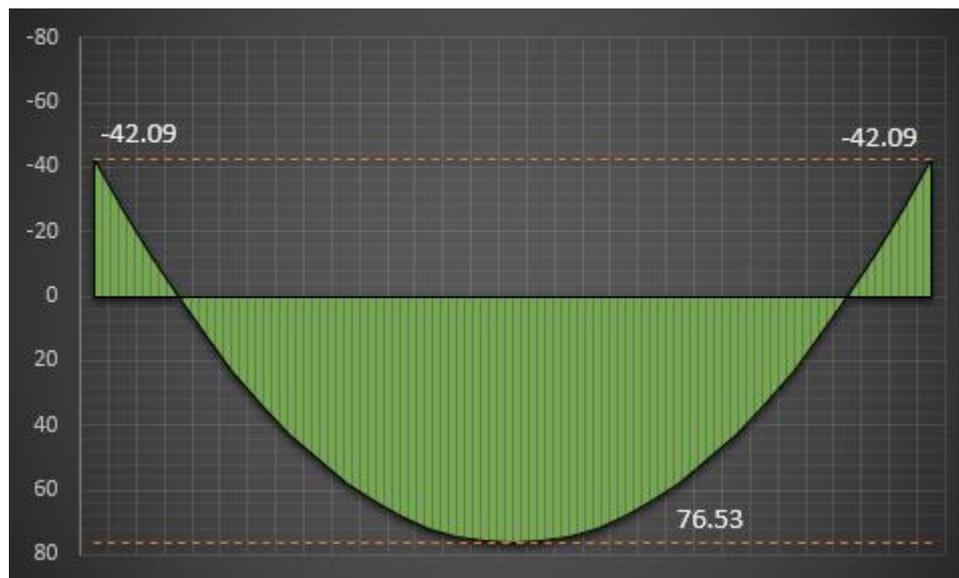


Рисунок 12. Гипотетическая эпюра изгибающего момента после распределения, М, кН×м при предельной нагрузке  $q=26.36$  кН/м

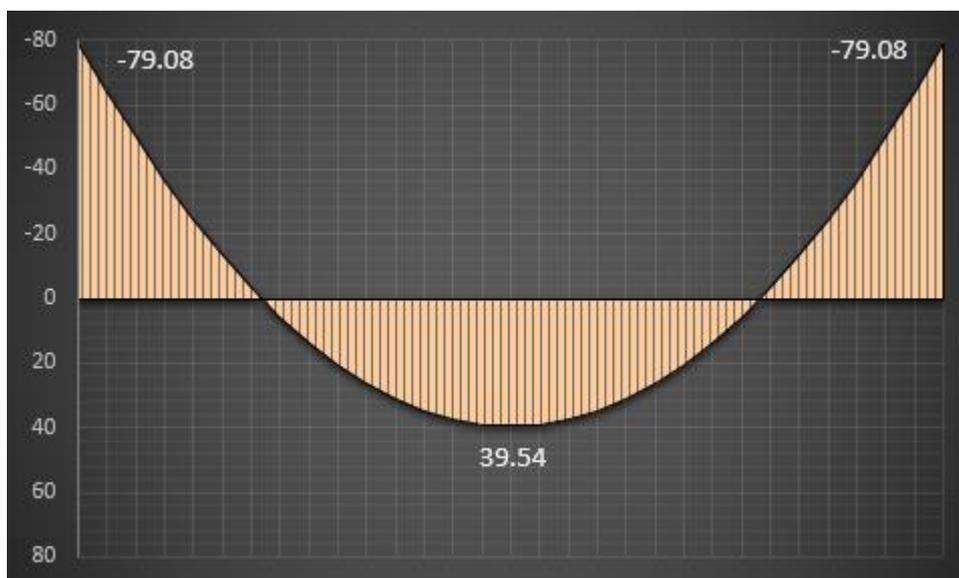


Рисунок 13 Эпюра изгибающего момента в балке по упругому расчету, М, кН×м при предельной нагрузке  $q=26.36$  кН/м

Но тут следует вспомнить об ограничениях, накладываемых на возможность перераспределения усилий. Эти ограничения приводятся полностью, согласно [2].

*Во избежание этого (появления недопустимых по условиям эксплуатации прогибов и раннее раскрытие трещин) п. 25 Инструкции [2] ограничивает возможность перераспределения усилий требованием, чтобы количество растянутой арматуры в основных (т. е. расчетных) сечениях каждого изгибаемого элемента конструкции не уменьшалось против требуемого по расчете упругой системы **более чем на 30%**. Этому с достаточной точностью соответствует более удобное для практики расчетов требование, согласно которому значения моментов после перераспределения усилий могут отличаться в меньшую сторону от моментов, полученных при расчете упругой системы, **не более чем на 30%**.*

К основным требованиям, необходимым для обеспечения материалам и элементам конструкций необходимых свойств и условий работы, при которых развивающиеся в них пластические и другие неупругие деформации допускали бы возможность существенного перераспределения усилий, согласно п. 13 Инструкции [2] относятся:

а) осуществление соответствующих конструктивных мероприятий, предотвращающих возможность среза сжатой зоны или раздавливания бетона от главных сжимающих напряжений;

б) соблюдение условия  $\frac{S_0}{S_0} \leq \xi_1$ , исключающего возможность хрупкого разрушения сжатой зоны бетона и обеспечивающего возможность неупругого деформирования арматуры;

в) применение для армирования так называемых мягких сталей, а также сварных сеток из холодноотянутой проволоки, высокопрочной проволоки, подвергнутой низкотемпературному отпуску, и гладкой высокопрочной проволоки.

Кроме того, учитывая, что с увеличением скорости загрузки величина неупругих деформаций снижается, Инструкция [2] разрешает рассчитывать с учетом перераспределения усилий только конструкции, работающие в условиях статических нагрузок.

То есть на перераспределение усилий накладываются ограничения – к примеру, величину момента нельзя занижать более чем на 30% от упругого расчета. В данном случае, это условие не выдержано:  $\frac{79.08-42.09}{79.08} = 46.78\%$ . Но величина 30% выглядит довольно эмпирической, посмотрим, на что это влияет при расчете сечений по НДМ. Но перед этим приводятся основные условия прочности сечения при расчетах по НДМ:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{b,max} &< \varepsilon_{b,ult} \\ |\varepsilon_{s,max}| &< \varepsilon_{s,ult} \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_{b,max}$  и  $\varepsilon_{s,max}$  - относительные деформации соответственно наиболее сжатого волокна бетона и наиболее растянутого стержня арматуры от действия внешних нагрузок, определяемые из решения уравнений;

$\varepsilon_{b,ult}$  и  $\varepsilon_{s,ult}$  - предельные значения относительных деформаций соответственно сжатого бетона и растянутой арматуры.

В данном случае, результаты следующие – полученная величина предельной нагрузки составляет  $q=19.60$  кН/м, что значительно меньше, чем полученная по результатам предыдущего примера. Графики изменения изгибающих моментов приведены на рисунках 14 и 15. По ним видно, что величина пролетного момента далека от предельного – никакого образования пластического шарнира в пролете не происходит, а вот график опорного момента, «касается» прямой линии предельного момента сечения, что означает потерю несущей способности сечения. Для того, чтобы было понятнее, что происходит с сечением в этот момент, следует посмотреть на график изменения относительной деформации арматуры  $\varepsilon_s$  и напряжений в арматуре  $R_s$  в зависимости от величины нагрузки (рисунок 16). Как видно на рисунке, напряжения в арматуре не растут (достигнут предел текучести), зато сечение, чтобы «удержать» полученный момент, начинает стремительно развивать деформации (в основе

нелинейной деформационной модели – гипотеза плоских сечений, то есть рост деформаций арматуры, как отдельного элемента, означает рост деформаций по всему сечению).

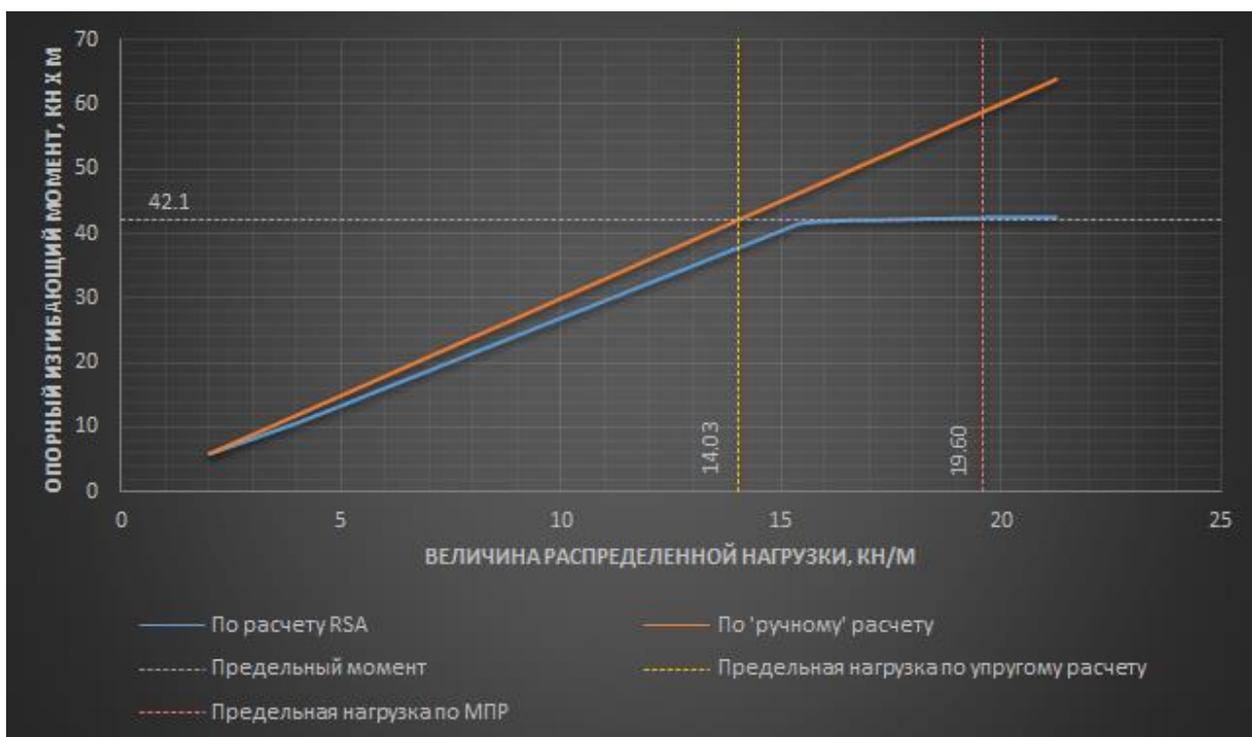


Рисунок 14. График изменения опорного момента в зависимости от нагрузки на балку



Рисунок 15. График изменения пролетного момента в зависимости от нагрузки на балку

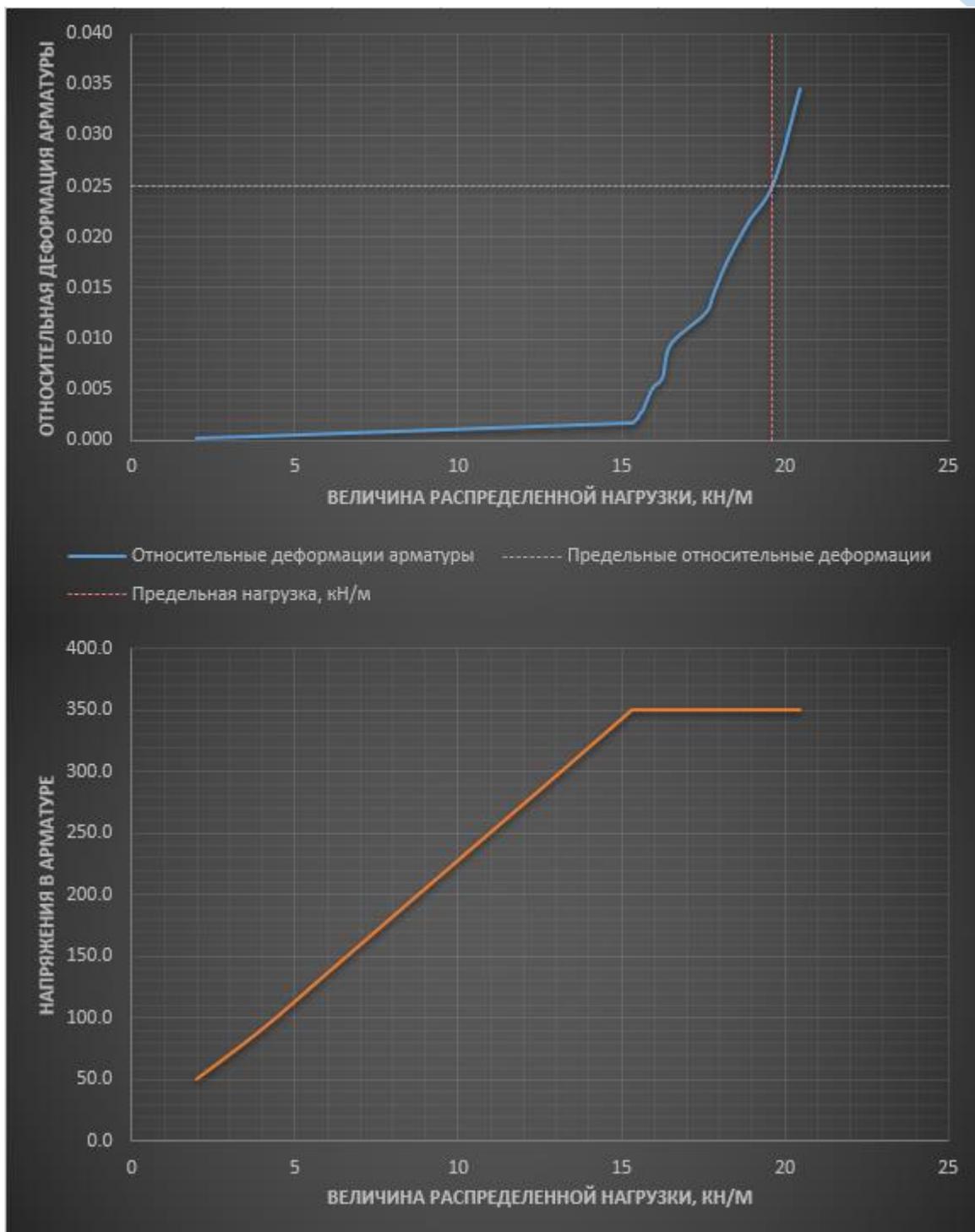


Рисунок 16. График относительных деформаций и напряжений в арматуре, МПа

Но арматура не может увеличивать деформации вечно – в определенный момент они достигают предельных, происходит «обрыв»<sup>1</sup> арматуры, и в опорных сечениях образуется обычный шарнир, а не пластический, способный «держат» определенную величину момента. Величина изгибающего момента в опорном сечении (рисунок 14) при предельной нагрузке составила  $M_{пр}=42.32 \text{ кН}\cdot\text{м}$ , а величина по «упругой схеме»  $M_{пр,el}=58.80 \text{ кН}\cdot\text{м}$ , то есть

<sup>1</sup> Тут я не совсем уверен

разница между величинами составляет  $\frac{58.80-42.32}{58.80} = 28\%$ . Неплохое совпадение с нормативными требованиями<sup>1</sup>.

На рисунке 17 приводится график изменения изгибной жесткости сечения в зависимости от величины изгибающего момента (по первому предельному состоянию, без учета растянутого бетона), на котором видно, что с образованием пластического шарнира, сечение начинает стремительно терять изгибную жесткость – именно этим и обеспечивается перераспределение усилий в статически неопределимых системах.

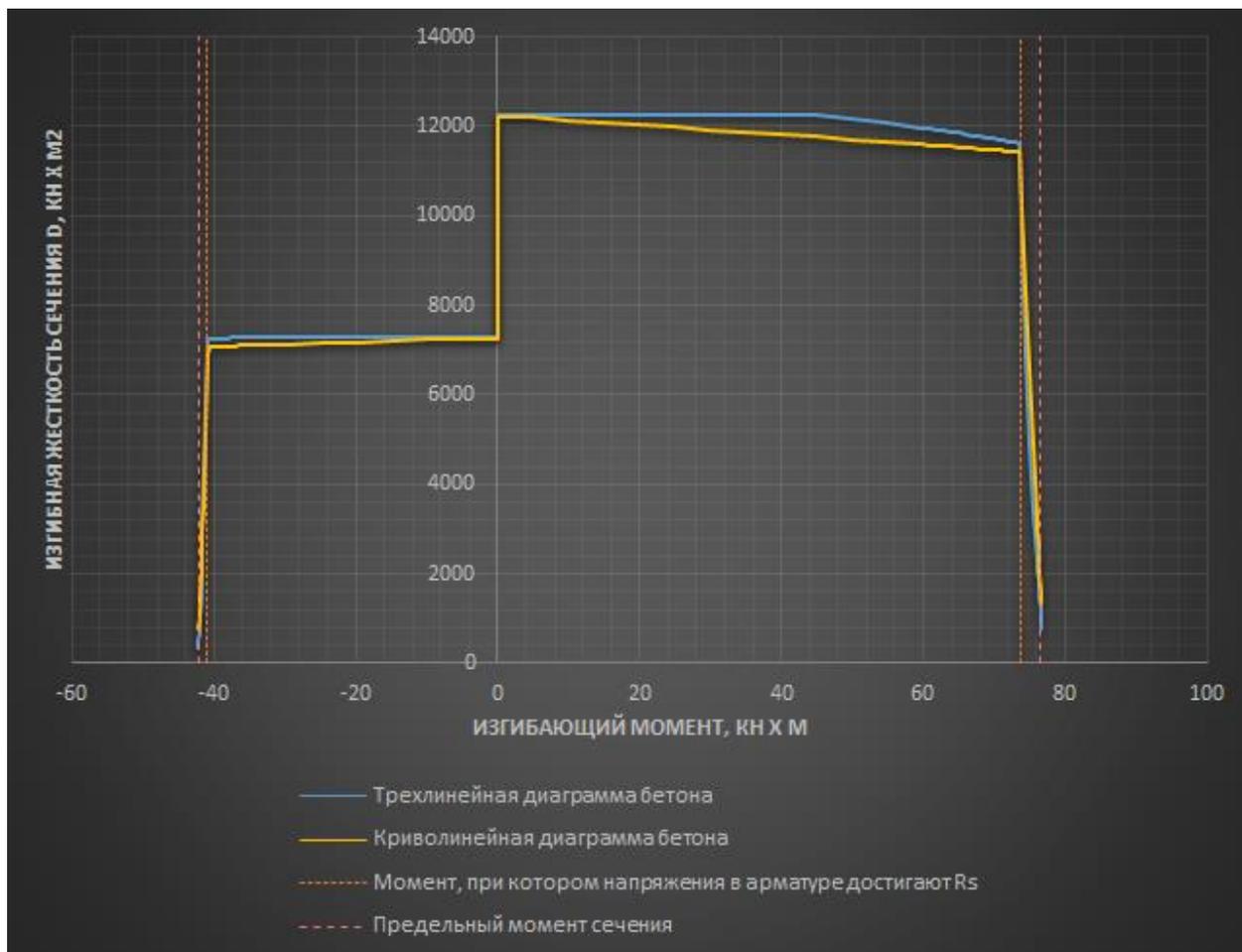


Рисунок 17. График изменения жесткости сечения D, кН·м<sup>2</sup> в зависимости от изгибающего момента M, кН·м

А что касательно «среза сжатой зоны» - то у меня нет однозначного момента на этот вопрос. С одной стороны, актуальные нормативные документы по расчету железобетонных конструкций не содержат взаимосвязи при расчете нормальных и наклонных сечений (расчеты на изгибающий момент<sup>2</sup> и поперечную силу ведутся независимо друг от друга, по разным сечениям), с другой стороны, в технической литературе, например [3], есть глава посвященная прочности при разрушении по сжатой зоне в результате среза бетона над наклонной трещиной,

<sup>1</sup> Тут надо учитывать, что ведется численный расчет, который не всегда может гарантировать точное совпадение с аналитическими зависимостями – хотя для большинства это и без пояснений ясно.

<sup>2</sup> Имеется в виду расчет на момент по нормальному сечению

в которой авторы устанавливают взаимосвязь предельного сопротивления по бетону от высоты сжатой зоны.

В любом случае, вследствие значительных деформаций, величина сжатой зоны при относительных деформациях арматуры близких к предельным (в этом случае относительные деформации по всему сечению также существенны) крайне невелика, а вычисленная глубина раскрытия трещин может достигать до сжатой арматуры, как в данном примере, показанном на рисунке 18. Какой она будет в действительности, и какова несущая способность данного сечения на поперечную силу – у меня нет ответа на этот вопрос (но, полагаю, невысокая).

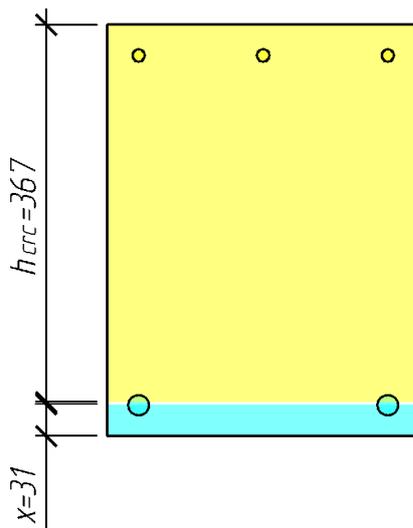


Рисунок 18. Величина сжатой зоны (показана голубым) и глубина раскрытия трещин (показана желтым) при предельном изгибающем моменте.

Резюмируя данную главу – перераспределение усилий в статически неопределимых железобетонных конструкциях имеет свой предел, и не следует перераспределять усилия больше, чем на 30% от упругого расчета: например, в данном случае это привело к «обрыву» растянутой арматуры.

И закончить данный пост хотелось бы некоторыми соображениями о жесткости железобетонного элемента.

## 5. Несколько слов о жесткости железобетонного элемента

Вероятно, для много стало неожиданным, что на простой балке, с простым армированием, значения изгибающих моментов отличаются по значениям от классических формул по расчету балочных элементов. В данном случае это объясняется тем, что балка – это статически неопределимая система с переменной по длине изгибной жесткостью, а значит, как и в любой статически неопределимой системе, более жесткие элементы способны принять на себя большее усилие, нежели менее жесткие.

И в этой связи интересно было бы посмотреть на «реальное» распределение жесткости балки по её длине. Конечно, приводились рисунки 6 - 8, показывающие это распределение, но они были для первого предельного состояния, то есть не учитывали работу растянутого бетона и трещинообразование.

Для балки, приведенной в главе 2 (рисунки 1 и 2), при нормативной длительной нагрузке  $q_{nl}=20$  кН/м, были выполнены расчеты жесткости по длине по трем методикам:

- расчет по нелинейной деформационной модели (трехлинейная диаграмма бетона) с определением усилий в ходе итерационного расчета;
- расчет по методике (предельных усилий) согласно п. 8.2.29 СП 63.13330.2012<sup>1</sup> с определением величин моментов по упругой схеме;
- жесткость, принимаемая согласно п. 6.2.7 СП 52-103-2007, то есть с коэффициентом 0.2 к модулю упругости бетона.

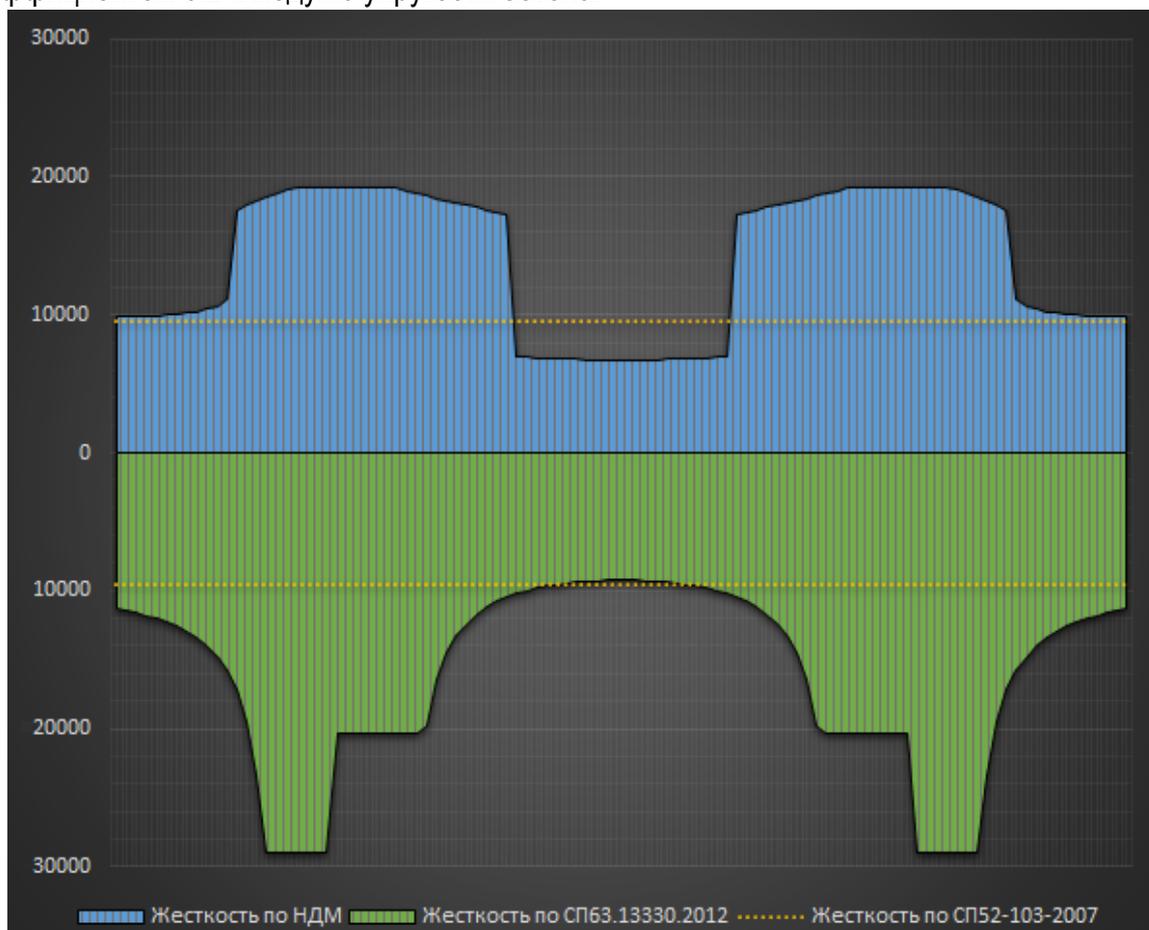


Рисунок 19. Эпюра изгибной жесткости балки по разным методикам

Были сравнены величины максимальных прогибов, полученные по МКЭ расчету балки с вычисленными жесткостями; результаты сравнения приведены в таблице 3.

Таблица 3. Сравнение максимального прогиба

Максимальный прогиб при жесткости балки, мм			Программа «Арбат», мм
Нелинейная деформационная модель	Методика СП 63.13330.2012	Жесткость согласно п. 6.2.7 СП 52-103-2007 (коэффициент 0.2)	
7.150	7.167	7.031	6.802

<sup>1</sup> Надо сказать, что в методике множество формул с пояснением «допускается определять...»

Также был выполнен модальный расчет, с жесткостями и нагрузками, показанными выше. Результаты модального расчета приведены в таблице 4.

Таблица 4. Собственные частоты при различной жесткости

Собств. форма	Частота собственных колебаний, Гц, при жесткости балки		
	Нелинейная деформационная модель	Методика СП 63.13330.2012	Жесткость согласно п. 6.2.7 СП 52-103-2007 (коэффициент 0.2)
1	6.82	7.57	6.79
2	22.08	22.66	18.71
3	42.12	46.31	36.67

Какую жесткость задавать элементам при реальных расчетах – в данном случае я не склонен давать рекомендации, однако не исключаю, что близкие результаты балки с постоянной изгибной жесткостью  $0.2E_bI$  согласно СП 52-103-2007 в данном примере есть результат совпадения. Правда на мой взгляд, не совсем корректна рекомендация норм по коэффициенту 0.2 к модулю упругости бетона – так как это приводит к понижению не только изгибной жесткости элемента, но и осевой, и в случае, например, температурных нагрузок такой подход может быть «не в запас» по усилиям в элементах.

## 6. Выводы

По результатам необходимо сделать выводы, которые традиционно (как и все вышеизложенное) – лишь моё частное мнение.

1. Для конструкций, которые конструируются строго по результатам упругого расчета, распределение усилий бесполезно – в данном случае усилия некуда распределять.
2. Перераспределение должно быть ограниченным и для железобетона не превышать порог, определенный нормативно – 30% от упругого расчета; в противном случае не исключен выход сечений из строя или иные неблагоприятные последствия для конструкции

Список литературы Границы перераспределения усилий в статически неопределимых ж/б конструкциях

1. Блог Ильи Лоскутова: <http://dwg.ru/b/lis>
2. Кальницкий А.А. «Расчет статически неопределимых железобетонных конструкций с учетом перераспределения усилий». Издательство литературы по строительству. Москва, 1970 (<http://dwg.ru/dnl/13757>)
3. А.С. Залесов, Ю.А. Климов «Прочность железобетонных конструкций при действии поперечных сил» К. : Будивэльнык, 1989 (<http://dwg.ru/dnl/10280>)